

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITÉ DE NANCY I

pour obtenir le titre de

DOCTEUR INGÉNIEUR

par

Pierre DELFINER

Ingénieur Civil des Mines

Etude morphologique des milieux poreux et automatisation des mesures en plaques minces

Soutenue le 24 Juin 1971 devant la commission d'examen

Président : M. le Professeur

Examineurs : MM. les Professeurs

Invités : MM.

F. DAVOINE

G. MATHERON

M. DEPAIX

J. SERRA

J.M. FONCK

B. HOUSSE

A MES PARENTS

A EDITH



REMERCIEMENTS

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide scientifique et technique que j'ai reçue de toutes parts. Je tiens à exprimer ma gratitude :

au Professeur F. DAVOINE, Président de mon Jury de thèse.

au Professeur J. DEPAIX, Membre du Jury.

au Docteur G. MATHERON, Membre du Jury et rapporteur de ma
à Monsieur SERRA, Membre du Jury. thèse.

à Monsieur J.M. FONCK, Membre invité.

à Monsieur B. HOUSSE, Membre invité.

qui m'ont fait l'honneur de participer à ce Jury.

Je suis heureux de dire ici combien j'ai apprécié de pouvoir travailler dans l'entourage de Monsieur G. MATHERON, m'initier à ses théories si attachantes et me former par des contacts personnels à sa pensée originale et féconde.

Je veux remercier également Monsieur SERRA qui m'a enseigné la Géostatistique et la Morphologie Mathématique et fait partager son enthousiasme pour ces disciplines.

Je dois à Monsieur Ph. FORMERY, qui fut mon Professeur, d'avoir pris goût aux Probabilités et d'avoir ainsi vécu par la suite la riche aventure scientifique et humaine du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau.

La Compagnie Française des Pétroles et la Société ELF-RE ont généreusement financé mon étude et lui ont apporté une aide sans réserves et de tous les instants. Le problème capital de la préparation des échantillons a pu être résolu grâce au Laboratoire Exploration ELF.RE et en particulier aux travaux antérieurs et à la collaboration efficace de Monsieur J. ETIENNE. Les fréquents entretiens que j'ai eus avec Monsieur J.M. FONCK m'ont permis de saisir les liens entre les mathématiques appliquées et les problèmes spécifiques de l'industrie pétrolière. Monsieur J. THOUVENIN et Monsieur Y. DAGENS m'ont fait bénéficier de leurs observations de pétrographes.

Je remercie enfin la Société LEITZ-FRANCE et tout spécialement Monsieur H. STUTZER dont la gentillesse extrême et la compétence en matière de microscopie m'ont été précieuses.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

ETUDE MORPHOLOGIQUE DES MILIEUX POREUX

ET AUTOMATISATION DES MESURES EN PLAQUES MINCES

La théorie des fonctions aléatoires et son application aux phénomènes de la terre, réalisée en particulier voici plus de dix ans par la géostatistique a donné récemment naissance à un corps de démarches et de concepts entièrement nouveaux permettant de systématiser l'étude des formes et des structures : la Morphologie Mathématique. Cependant que G. MATHERON donnait à cette théorie ses bases et sa formalisation mathématique rigoureuse, J. SERRA imaginait et réalisait un appareil destiné à mesurer expérimentalement les grandeurs qui venaient d'être définies : l'Analyseur de Textures. Morphologie Mathématique et Analyseur de Textures, "software" et "hardware" adapté, arrière plan conceptuel et mise en oeuvre concrète, constituent un moyen d'investigation puissant riche de promesses dans le domaine de la pétrographie sédimentaire et en particulier celle des roches-réservoirs.

C'est pourquoi la COMPAGNIE FRANÇAISE DES PETROLES et la SOCIETE ELF-RE se sont associées au CENTRE DE MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE pour tenter d'appliquer ces idées et techniques nouvelles à la fois à la recherche de paramètres morphologiques des roches réservoirs susceptibles d'intéresser l'industrie pétrolière, et à l'automatisation de leur mesure en plaques minces.

Tel est l'objet de la présente étude.

Les échantillons qui lui servent de support expérimental, baptisés sous la désignation DELF, proviennent de faciès choisis aussi différents que possible afin de mettre les méthodes à l'épreuve des situations les plus variées.

CHAPITRE I

INTERET DE LA MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE

DANS L'ETUDE DES ROCHES-RESERVOIRS

La Morphologie Mathématique intéresse l'étude des roches-réservoirs à double titre : par le progrès qu'elle peut apporter à la pétrographie sédimentaire en y introduisant des concepts objectifs, précis et mesurables ; par la caractérisation mathématique de la géométrie du réseau poreux, dont dépendent les grandeurs physiques essentielles du milieu réservoir : porosité, perméabilité, forces capillaires. Un exposé critique de la formule de KOZENY-CARMAN montre la difficulté d'explicitier les liens entre la perméabilité et cette géométrie des pores.

I - QUELQUES INSUFFISANCES DE LA PETROGRAPHIE QUANTITATIVE

En pétrographie sédimentaire l'approche qualitative, la description verbale des roches, présente un défaut majeur : elle est imprécise, subjective, rend la communication difficile. Dire d'un grain qu'il est "moyen, quasi-sphérique et subanguleux", ou d'un grès qu'il est "hétérométrique (fin, moyen)" ou au contraire "assez bien classé" suffit peut être à donner une idée approximative mais ne peut servir de base à un travail scientifique. La querelle sur le simple emploi de mots tels que "sables, graviers, galets, etc..." dont on trouve l'écho dans le SEDIMENTARY ROCKS de PETTIJOHN (1957) [22] montre qu'on ne peut s'entendre qu'à partir d'une définition quantitative. C'est déjà un progrès en soi car la clarification du langage implique une clarification des concepts. La mise de l'information sous forme de données chiffrées sera peut-être pour la pétrographie l'occasion d'un véritable bond en avant, quand on considère les perspectives que lui ouvrent les mathématiques, les statistiques et tous les moyens actuels de traitement numérique.

1 - Les concepts

Mais la pétrographie quantitative est une discipline récente. Ses concepts ont été forgés par des naturalistes qui en ressentaient l'utilité mais ne se sont pas attardés sur les problèmes mathématiques soulevés par leurs définitions. Examinons par exemple la notion

de "rondeur". WADELL [41] repris par KRUMBEIN [36] a proposé un indice de rondeur mettant en jeu les rayons de courbure des parties saillantes (corners) :

$$P = \frac{\sum_i r_i}{R N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N : \text{nombre de rayons mesurés} \\ r_i : \text{rayon de courbure des bosses} \\ R : \text{rayon du cercle inscrit} \end{array} \right.$$

Ces mesures se font en principe dans 3 plans orthogonaux.

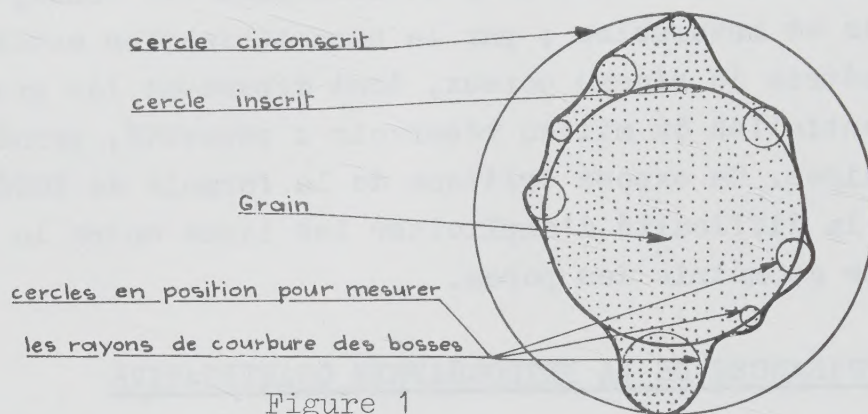


Figure 1

On peut déjà s'interroger sur la valeur descriptive de l'indice choisi. Est-il vraiment représentatif de l'aspect plus ou moins bosselé du contour du grain? Ce n'est pas sûr : les deux grains ci-dessous ont même rondeur.

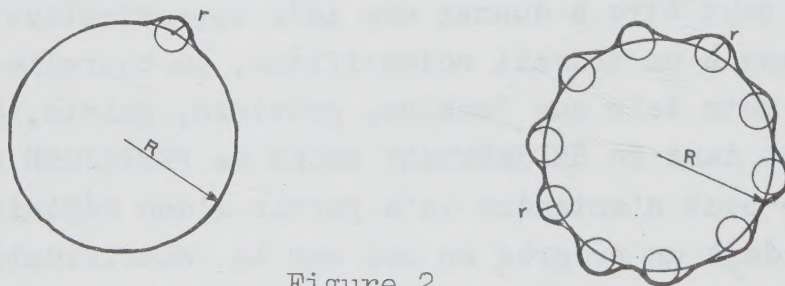


Figure 2

Mais d'autres questions se posent.

Comment cet indice évalue-t-il la rondeur d'un carré ? Les rayons de courbure ne sont pas définis. On peut certes convenir d'affecter un rayon de courbure nul à un point anguleux mais alors tout polygone a une rondeur nulle. Les deux figures ci-dessous par exemple auront même rondeur (nulle) :

(avec des facettes)



Figure 3

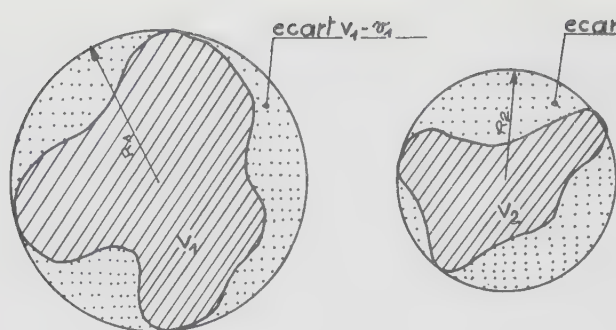
Autre question : Qu'est-ce qu'une protubérance ? WADELL attribue une rondeur parfaite (= 1) à un cylindre à extrémités hémisphériques. Soit, mais la sphère elle-même ? Il ne résulte pas de la définition que sa rondeur soit égale à 1 car il faudrait prendre en compte les rayons de courbure du corps du grain lui-même et non plus seulement des saillies. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté la distribution des rayons de courbure du grain doit être bimodale : un grand rayon de courbure égal à celui du cercle inscrit et d'autres rayons nettement plus petits. La rondeur d'une ellipse n'est pas définie.

A cette critique qui porte sur l'imprécision de la définition s'en ajoute une autre plus générale : le caractère arbitraire du passage en moyenne. Ce qu'il importe de caractériser n'est évidemment pas l'aspect de tel ou tel grain particulier mais celui d'une population. Alors à supposer même que le concept précédent de rondeur soit solide comment définir la rondeur moyenne de plusieurs grains ? On peut toujours faire la simple moyenne arithmétique des rondeurs mais il n'y a pas d'interprétation physique à cette rondeur moyenne.

Le fait est encore plus parlant sur l'indice de sphéricité selon W.C. KRUMBEIN :

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{v}{V}} = \sqrt[3]{\frac{\text{volume du grain}}{\text{volume de la sphère circonscrite}}}$$

soit encore en notant r le rayon nominal du grain (celui de la sphère de même volume) et R le rayon de la sphère circonscrite $\psi = \frac{r}{R}$



Prenons deux grains d'indices respectifs 1 et 2. La moyenne arithmétique $\frac{\phi_1 + \phi_2}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{r_1}{R_1} + \frac{r_2}{R_2} \right]$ n'a pas de signification géométrique.

Figure 4

En revanche le rapport $\frac{v_1 + v_2}{V_1 + V_2}$ a un sens : c'est la proportion au volume total des deux sphères du volume occupé par les grains inscrits ; ou encore, si l'on note que $(V_1 - v_1)$ est "l'écart" du grain à sa sphère circonscrite :

$$\frac{(V_1 - v_1) + (V_2 - v_2)}{V_1 + V_2} = \frac{\text{volume des écarts}}{\text{volume des sphères}} = 1 - \frac{v_1 + v_2}{V_1 + V_2}$$

Ces considérations suggèrent de prendre pour sphéricité moyenne

$$\bar{\phi} = \sqrt[3]{\frac{v_1 + v_2}{V_1 + V_2}} = \sqrt[3]{\frac{\phi_1 V_1 + \phi_2 V_2}{V_1 + V_2}}$$

pondération bien différente de celle de la moyenne arithmétique. Elles suggèrent aussi que $\frac{v}{V}$ serait plus commode à manier que $\sqrt[3]{\frac{v}{V}}$. Mais ces questions de rondeur et sphéricité seront abordées au chap. IX. Il ne s'agissait ici que d'exemples.

2 - Mode opératoire et concept

L'étude des formes est une entreprise difficile et l'on peut concevoir qu'elle présente des pièges. Mais la taille est-elle une notion mieux définie ? Non. Ainsi que le note PETTIJOHN [22] le concept de "diamètre" d'un grain est ambigu. Seule une sphère possède un diamètre unique.

"En pratique toutes les méthodes de mesure se fondent sur l'hypothèse que les particules sont sphériques ou que les mesures peuvent être exprimées comme diamètres de sphères équivalentes". Certains auteurs, prenant comme référence l'ellipsoïde définissent 3 diamètres selon les 3 axes principaux. Mais pour un solide irrégulier doit-on choisir les diamètres à angles droits ou passant par un point commun ? Comment les combiner pour calculer un diamètre moyen ? Plus précise est la notion de "diamètre nominal", qui influe sur la vitesse de

sédimentation du grain. Mais la donnée de ce diamètre n'est autre que celle du volume du grain et ne renseigne en rien sur son extension latérale.

Devant ces difficultés beaucoup de praticiens du tamisage définissent la taille des grains comme étant précisément la caractéristique que mesurent leurs appareils, selon une procédure définie (normes AFNOR par exemple). Par là les expérimentateurs conviennent en quelque sorte d'un langage commun et les comparaisons sont possibles : si un même mode opératoire fournit des résultats différents pour divers échantillons c'est que ces différences proviennent des échantillons. Mais on ne sait toujours pas ce qu'on mesure. Que l'on fasse varier la forme de la maille du tamis, le temps de brassage, l'impulsion communiquée aux grains et les résultats des mesures sur une même population seront différents, sans qu'on puisse les comparer. Actuellement beaucoup d'appareils nouveaux sont mis sur le marché, destinés à la mesure des granulométries de fines particules. Chacun a sa technique particulière : tamisage par ondes sonores, Coulter Counter basé sur une méthode électrique, granulomètre à laser, et l'on aura du mal à savoir si les différences entre leurs résultats révèlent une hétérogénéité des lots ou simplement la disparité des techniques. La difficulté vient de la confusion du concept et du mode opératoire. Dire "la granulométrie est ce que mesure mon tamis" c'est adopter l'attitude du psychologue affirmant : "l'intelligence est ce que mesure mon test". Le concept doit précéder la mesure. Telle est bien la démarche de la Morphologie Mathématique qui définit le concept général de granulométrie en soi et non par exemple comme le résultat d'une mesure à l'analyseur de textures.

3 - Les chartes

Une autre tendance de la pétrographie est la discrétisation des phénomènes par le moyen de chartes. On considère une certaine caractéristique numérique d'un échantillon qu'on discrétise de façon à former des classes. L'appartenance de la valeur de la caractéristique d'un échantillon à une classe donnée constitue une relation d'équivalence sur l'ensemble des échantillons. Ce dernier peut alors être découpé en classes d'équivalence dont on illustre un ou plusieurs représentants au moyen d'une charte. L'expérimentateur compare visuellement l'échantillon qu'il a sous les yeux à ceux de la charte et en dé-

duit une valeur de la caractéristique. Cette méthode est bien répandue : il existe des chartes de porosité, de tailles de particules, de rondeur, de sphéricité, de fabrique ... et il est vrai que des observateurs entraînés obtiennent des résultats fort bons. Pourtant il faut bien l'admettre, la méthode est bâtarde : semi-qualitative, semi-quantitative. Les exemples de la charte ne sont que les représentants les plus courants de la classe d'équivalence et l'oeil a du mal à comparer des formes très différentes. Assimiler par exemple le pourcentage en surface d'une répartition de polygones disséminés sur un cercle à la porosité d'un réseau connexe de pores liés par des canaux est un exercice subtil. En outre on ne possède aucun critère pour évaluer la qualité de l'ajustement, une "distance" du modèle à l'échantillon réel. La distinction est problématique entre un grain sub-arrondi ou sub-anguleux. Une charte peut servir à illustrer, à la rigueur à chiffrer grossièrement une description de style qualitative mais certainement pas à établir des données numériques qui alimenteraient un programme élaboré de traitement statistique.

II - CARACTERISTIQUES PHYSIQUES DU RESERVOIR ET GEOMETRIE DU RESEAU POREUX

On a beaucoup étudié la géométrie des grains mais rarement celle des pores. La raison est qu'on manquait d'outils pour appréhender des formes aussi complexes que celles d'un réseau de pores. Derrière la plupart des notions courantes de la pétrographie se cache l'hypothèse implicite de "grain individualisable", voire souvent convexe. On peut bien parler de volume moyen d'un grain mais comment concevoir le "volume moyen d'un pore" quand ce pore n'est pas isolé mais relié à d'autres par un réseau connexe ? On peut évaluer la granulométrie d'un sable, mais quel tamis révélera celle d'un milieu poreux ? La Morphologie Mathématique répond à cette question, qui est d'importance car les caractéristiques physiques du milieu réservoir dépendent directement de la géométrie des pores et non de celle des grains.

Ces caractéristiques sont la porosité, la perméabilité et les grandeurs relevant des phénomènes capillaires. On ne trouvera malheureusement pas dans l'étude présente de liens entre les propriétés hydrodynamiques de la roche et sa géométrie. Le problème est fort difficile et n'a reçu à ce jour aucune réponse satisfaisante, ainsi qu'en témoigne une critique rapide des tentatives antérieures, principalement celles de KOZENY et CARMAN.

1 - Porosité

Elle indique la capacité de stockage du réservoir et dépend évidemment du réseau poreux lui-même. Mais les liens entre sa morphologie et les diverses mesures de porosité sont plus complexes qu'il ne paraît d'abord (cf. Chap. V).

2 - Perméabilité

Elle permet de prévoir le débit d'un puits. Comme la porosité c'est une propriété intrinsèque du milieu poreux : elle ne dépend que de sa géométrie, étant par construction homogène au carré d'une longueur.

La relation fondamentale définissant la perméabilité est la loi de DARCY qu'on peut écrire sous la forme :

(I,1)

$$Q = K \frac{\Delta P}{\mu L} A$$

Q est le débit-volume d'un fluide Newtonien, de viscosité dynamique μ , soumis à un gradient de charge $\Delta P/L$ à travers une section A . Dans un milieu quelconque K est un tenseur et la formule (I,1) suppose l'isotropie : K est alors un scalaire (tenseur-scalaire). D'un point de vue physique il synthétise tout ce qui est dû à l'influence de la géométrie du milieu poreux. De très nombreux auteurs se sont attachés à relier K à des critères géométriques élémentaires. Leurs travaux procèdent de deux démarches différentes : une approche théorique, corroborée par des expériences, mais à valeur générale ; ou bien une approche empirique sur un type de roche précis. Dans ce dernier cas les caractéristiques prises en corrélation avec la perméabilité sont en général celles qui interviennent dans les formules théoriques. (Etudes du type : "Corrélation entre la perméabilité et les caractéristiques géométriques du grès de Fontainebleau" de C. JACQUIN [2]). Examinons donc la première approche.

La plus célèbre relation théorique est la formule de KOZENY-CARMAN. En 1922, à l'aide de l'analyse dimensionnelle BLAKE [5] a exprimé la perméabilité en fonction de la porosité et de la surface spécifique. Plus tard KOZENY [35] a établi la relation directement en assimilant le réseau poreux à un ensemble de canaux cylindriques parallèles identiques, possédant même volume que les pores et même surface que les particules. Pour une couche granulaire (granular bed), cas

pores si les contacts sont tangentiels ; sinon elle peut être notablement supérieure. La formule de KOZENY est la suivante :

$$(I,2) \quad u = \frac{\varepsilon^3}{k \mu S^2} \frac{\Delta P}{L}$$

où

- u : vitesse moyenne apparente (débit-volume rapporté à l'aire de la section droite de l'échantillon)
- ε : porosité
- S : surface spécifique (surface des particules unité de volume d'échantillon)
- k : constante de forme

$$(I,2') \quad K = \frac{\varepsilon^3}{k S^2}$$

Si le milieu est constitué d'un empilement de sphères de même diamètre d :

$$S = \frac{6(1-\varepsilon)}{d} \quad \text{et en portant dans}$$

$$(2') \quad K = \frac{\varepsilon^3 d^2}{36 k (1-\varepsilon)^2}, \quad \text{soit, en introduisant}$$

S_0 = surface des grains/volume des grains

(S_0 est appelée "surface spécifique" par certains auteurs).

$$(I,3) \quad K = \frac{\varepsilon^3}{k S_0^2 (1-\varepsilon)^2}$$

Formule de KOZENY-CARMAN

La relation (I,3) est confirmée par l'expérience dans le cas de sables de porosité notable (de l'ordre de 40 %), et de façon générale dans le cas de milieux non consolidés. Cependant l'étude plus fine de M.R.J. WYLLIE et A.R. GREGORY [42] montre les liens de cette prétendue constante avec la porosité et la forme des particules, et ceci a fortiori pour les milieux consolidés, comme les roches pétrolifères. La formule (I,3) ou (I,2') n'isole donc pas en général de variable autonome. Le caractère inexplicable des phénomènes a simplement été transféré de la perméabilité elle-même à ce

facteur k qui rend compte à lui tout seul de ce que les canaux réels ne sont ni cylindriques, ni parallèles, ni disjoints, etc... Aussi a-t-on cherché ensuite à réduire à son tour le facteur k à des notions premières.

Au lieu d'affecter aux canaux cylindriques parallèles de leur modèle la longueur L de l'échantillon KOZENY et CARMAN [26] ont proposé une longueur fictive L_e , supérieure à L, représentant la longueur du trajet réel suivi par les éléments de fluide, à l'échelle microscopique. Ils obtiennent une relation où la constante k de la formule (I,3) devient :

$$(I,4) \quad k = k_0 \left(\frac{L_e}{L} \right)^2$$

k_0 est une constante de forme. Plus précisément c'est le coefficient qui permet d'exprimer la vitesse moyenne d'un fluide dans un cylindre à section droite quelconque en démarquant la loi de POISEUILLE valable pour un cylindre de révolution. Si la section droite des canaux équivalents était connue k_0 serait déterminable ($k_0 = 1,78$ pour une section carrée, $1,67$ pour un triangle équilatéral, etc...). Or ce n'est pas le cas et à supposer que le terme $\left(\frac{L_e}{L} \right)^2$, baptisé "tortuosité" par ROSE et BRUCE en 1949 [39] ait un sens, k_0 ne serait, tout comme l'était k, qu'un facteur d'ajustement d'un modèle à un phénomène réel.

Mais la tortuosité n'est pas une caractéristique bien définie. On ignore le trajet réel parcouru par le fluide et la grandeur L_e est arbitraire. CARMAN évaluait la tortuosité à 2 en observant des filets de courant colorés ayant une direction moyenne de 45° par rapport à l'axe de l'écoulement macroscopique. D'ordinaire on emploie une méthode basée sur le facteur de formation (rapport de la résistivité d'un milieu poreux saturé par un électrolyte à la résistivité de l'électrolyte) G.E. ARCHIE [24] a tout d'abord posé :

$$f = \varepsilon^{-m}$$

f : facteur de formation

m : "facteur de cimentation"

Mais M.R.J. WYLLIE et W.D. ROSE [43] ont critiqué cette formule

et proposé $f = \frac{1}{\varepsilon} \frac{L_e}{L}$ soit $f = \frac{T^{1/2}}{\varepsilon}$

Ceci revient à considérer que le milieu cylindrique équivalent est de longueur L_e et de section ϵA (A : aire de la section droite de l'échantillon). D'autres auteurs comme D. CORNELL et D.L. KATZ [28] pensent que le modèle équivalent est de longueur L_e mais de section $\epsilon A \frac{L}{L_e}$, d'où un facteur de formation : $f = \frac{T}{\epsilon}$

La raison profonde de ces divergences est l'ambiguïté même du concept de tortuosité et surtout le manque de fondements de la démarche qui consiste à remplacer le milieu réel par des capillaires parallèles. Elle est d'ailleurs sérieusement remise en cause et nombre de spécialistes ne voient dans les modèles de capillaires que des tentatives pour expliquer des formules purement empiriques. Pour eux les critiques précédentes n'auront donc réussi qu'à enfoncer des portes ouvertes.

Faut-il rester sur une attitude aussi négative et renoncer à exprimer la perméabilité en fonctions de critères géométriques ? Non, car si la recherche théorique est bloquée par des difficultés mathématiques on peut cependant espérer mettre à profit des paramètres géométriques nouveaux, tels que ceux de la Morphologie Mathématique. G. MATHERON [1] par exemple calcule le tenseur de perméabilité d'un milieu constitué de canaux disjoints, en forme de cylindres de révolution et admettant des orientations diverses et des rayons différents. Il apparaît que ce tenseur n'est pas en relation directe avec la surface spécifique mais dépend uniquement de la porosité (linéairement) et du moment d'ordre deux de la "loi du premier point de contact". Par analogie il serait intéressant de mettre en rapport la perméabilité de milieux réels avec ce moment d'ordre deux ou toute autre caractéristique tensorielle homogène au carré d'une longueur. En prenant par exemple une moyenne quadratique des traversées linéaires on peut retrouver la formule de KOZENY-CARMAN comme cas particulier.

3 - Phénomènes capillaires

L'étude du milieu poreux dans les conditions réelles de fond est compliquée par la présence de deux ou plusieurs phases. Outre l'huile les pores renferment en général de l'eau qui fait intervenir des forces capillaires et des tensions interfaciales entre fluides.

L'eau présente dans le réservoir est un fluide mouillant : ses atomes d'hydrogène forment un lien puissant avec l'oxygène des roches. Les forces capillaires font monter l'eau au-dessus de la surface de séparation eau-huile telle qu'elle serait déterminée par les seules forces de gravité (plan d'eau). La saturation en eau décroît progressivement avec la profondeur de 100 % au plan d'eau à une valeur de 20 % ou 30 % (eau irréductible) et comme le notent J. ETIENNE et J. LE FOURNIER [29] "à chaque niveau du réservoir les possibilités maximum d'envahissement par l'huile seront en définitive contrôlées par la morphologie du réseau de porosité". La méthode de coloration à deux résines qu'ils ont mise au point permet de visualiser la répartition respective de l'eau et de l'huile sous des conditions de pression capillaire donnée. Il devient possible de mesurer la porosité utile à l'huile, la surface de contact eau-roche et eau-huile. On observe également que le domaine occupé par l'eau n'est pas quelconque, elle colle aux "exiguités" diverses : parties anguleuses des cavités intergranulaires, interstices, canalicules reliant les gros pores, etc... Dans quelle mesure peut-on le prévoir par simple examen des plaques minces ?

CHAPITRE II

=====

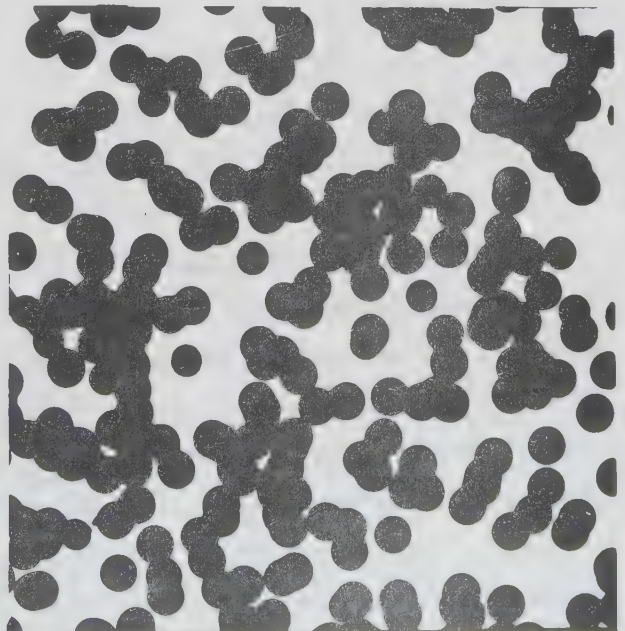
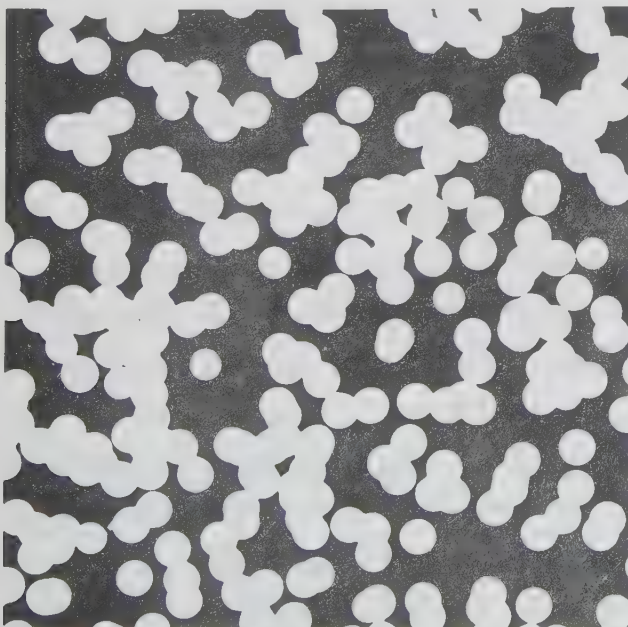
RAPPELS GENERAUX DE MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE

La Morphologie Mathématique est une théorie de la caractérisation des formes. Soulignons-le il s'agit de caractérisation et non pas de reconnaissance de forme, au sens des automaticiens qui cherchent à agréger des individus à un ensemble de références défini par certains critères. On ne cherche pas à identifier un visage humain, un chromosome ou une lettre de l'alphabet mais à appréhender leurs formes de façon mathématique.

L'exposé détaillé des idées et méthodes de la théorie se trouve principalement dans les ouvrages de G. MATHERON (Eléments pour une théorie des milieux poreux) [1], J. SERRA (Introduction à la Morphologie Mathématique) [4] et dans l'article plus simple de HAAS, MATHERON et SERRA (Morphologie Mathématique et granulométries en place) [14]. Le présent chapitre y fait de larges emprunts pour donner un aperçu de l'essentiel au lecteur qui ne connaîtrait pas la Morphologie Mathématique et n'aurait pas le loisir de se reporter aux ouvrages de base.

Toutefois le dernier paragraphe, sur les problèmes de champ, est nouveau.

I - RESUME INTRODUCTIF



les photos 1 et 2 représentent la même image (schéma booléen). Pourtant on a l'impression que la teneur des blancs sur la photo de gauche est supérieure à celle des noirs sur la photo de droite. Illustion d'optique.

L'appareil perceptif humain n'est pas neutre. Afin de réduire la complexité initiale de l'objet il y plaque ses propres structures en l'organisant en catégories sur lesquelles l'esprit a prise. La perception humaine est intelligente en ce qu'elle intègre et ordonne une multitude de facteurs mais aussi subjective tant que son code reste implicite.

La Morphologie Mathématique procède par la démarche de toute mesure, qui consiste à comparer l'objet à un standard connu. Elle est élémentaire et objective. Pour évaluer des formes elle les met en relation avec d'autres formes, choisies de manière arbitraire mais explicite. Ces formes auxiliaires, ces figures informantes qui révèlent des dépendances internes de l'objet ont reçu le nom "d'éléments structurants". Leur gamme est a priori l'infinité des formes possible chacune ayant son potentiel descriptif propre. Quant aux relations qui lient l'ensemble A à l'élément structurant B elles peuvent se ramener à la plus élémentaire : le fait que la figure B implantée au point x ait une intersection vide ou non avec A, ou ce qui revient au même le fait qu'elle soit ou non incluse dans son complémentaire.

A chaque question ainsi posée à l'objet par l'élément structurant correspond l'ensemble des points x pour lesquels la réponse est affirmative. Géométriquement cet ensemble se déduit de A lui-même par une transformation simple : érosion ou dilatation. Des relations plus complexes s'obtiennent en itérant ces opérations.

L'étape conceptuelle suivante consiste à recourir au langage des probabilités. La Théorie des Ensembles Aléatoires de G. MATHERON établit qu'on peut considérer des propositions logiques du genre "B est inclus dans A" comme des événements d'un certain espace et leur affecter une probabilité. En termes intuitifs cela revient à regarder la forme étudiée comme une manifestation particulière d'un phénomène général, une "réalisation" de fonction aléatoire. Les probabilités de événements en question sont des moments de la loi spatiale, à ceci près qu'ils peuvent ici mettre en jeu une infinité de points. En outre, la nécessité de l'inférence statistique oblige à supposer la fonction aléatoire "stationnaire et ergodique" : par translation d'une réalisation

tion on obtient d'autres réalisations et qui plus est on les obtient presque sûrement toutes. Physiquement ces hypothèses sont celles de l'homogénéité du milieu.

Qu'on adopte ou non le formalisme probabiliste, dont les développements récents montrent d'ailleurs les liens profonds avec la géométrie intégrale, la Morphologie Mathématique, par sa richesse même a de quoi effrayer. Dans l'infinie variété des éléments structurants possibles et de ses relations avec la forme étudiée que choisir ? De fait il est remarquable que les propriétés fondamentales soient accessibles à partir de quelques figures simples : un point pour mesurer des surfaces, deux points pour des périmètres ou surfaces spécifiques, deux points encore mais à distance variable pour caractériser la régularité du phénomène, sa structure spatiale, l'extension de sa zone d'influence. Quatre points par exemple permettent de compter, un segment de bâtir des granulométries linéaires, deux segments de connaître la répartition des rayons de courbure, un cercle de sélectionner les angulosités, les rétrécissements, les petits grains, etc...

La difficulté véritable n'est pas tant de choisir l'élément structurant que de déceler les grandeurs géométriques essentielles d'un problème physique donné.

II - TRANSFORMATIONS ENSEMBLISTES

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$) on considère un ensemble A nommé conventionnellement les "grains" et son complémentaire A^c nommé "pores". A est un ensemble de vecteurs mais on peut lui faire correspondre biunivoquement un ensemble de points en fixant une origine de l'espace. Sur ces ensembles on définit deux opérations de base : l'addition et la soustraction de Minkowski.

1 - Addition de Minkowski

Définition :

Soient A et B deux ensembles de $\mathbb{R}^n$. On appelle somme de Minkowski de A et B un nouvel ensemble noté $A \oplus B$ tel que :

$$A \oplus B = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} (x+y)$$

L'opération $\oplus$ est évidemment associative et commutative.

$$\text{De plus } (A \cup A') \oplus B = (A \oplus B) \cup (A' \oplus B)$$

. Si de façon générale on désigne par Cz l'ensemble déduit de C par la translation de z :

$$Cz = \bigcup_{x \in C} (x+z)$$

$$\text{on voit que } A \oplus B = \bigcup_{\substack{x \in A \\ y \in B}} (x+y) = \bigcup_{x \in A} Bx = \bigcup_{y \in B} Ay$$

$A \oplus B$ est la réunion lorsque x décrit A des ensembles Bx déduits de B dans la translation x . C'est aussi la réunion lorsque y décrit B des ensembles Ay déduits de A dans la translation y .

. Désignons par $\check{B}$ le transposé de B (son symétrique par rapport à l'origine)

On montre alors que Z appartient à la somme $A \oplus B$ si et seulement si l'ensemble $\check{B}$ implanté en z rencontre A :

$$z \in A \oplus B \Leftrightarrow (\check{B})_z \cap A \neq \emptyset$$

C'est cette relation qui sert en pratique à caractériser $A \oplus B$.

Exemples

1 - B est un cercle implanté à l'origine, A les figures

grain initial 

grain dilaté 

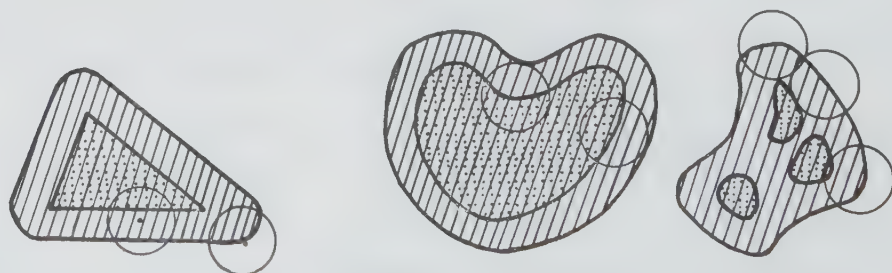


fig. 3

Implanté en tout point intérieur au contour externe un cercle B coupe A ; implanté à l'extérieur B est disjoint de A .

Dans cet exemple on voit que $A \oplus B$ est en quelque sorte le "dilaté" de A. De fait on appelle dilaté de A par B l'ensemble $A \oplus \check{B} = \{z : Bz \cap A \neq \emptyset\}$. Pour un ensemble B symétrique comme le cercle : $A \oplus \check{B} = A \oplus B$. Pour B non symétrique ces 2 ensembles sont différents comme le montre l'exemple suivant.

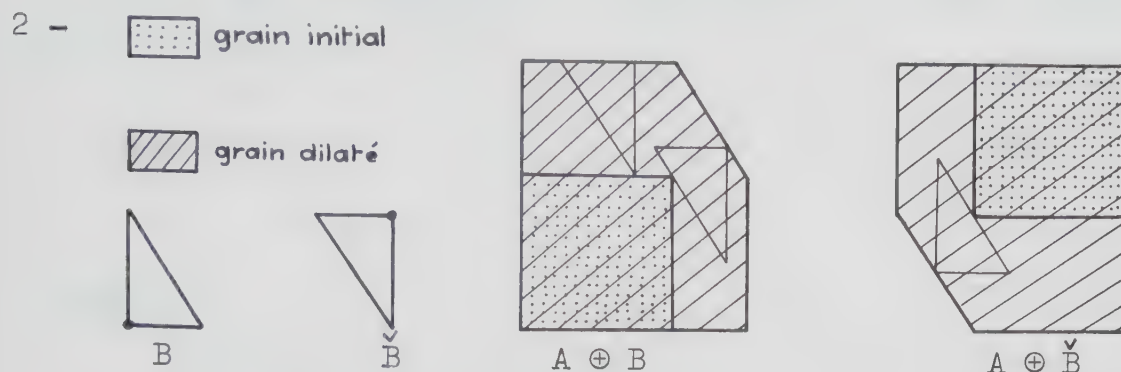


Fig. 4

2 - Soustraction de Minkowski

L'addition de Minkowski n'admet pas d'inverse. Mais par dualité vis à vis de la complémentation on définit la soustraction :

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c$$

on montre que :

$$A \ominus B = \bigcap_{y \in B} A_y$$

$A \ominus B$ est l'intersection lorsque y décrit B des ensembles A_y déduits de A par la translation y.

z appartient à la différence $A \ominus B$ si et seulement si l'ensemble $\check{B}z$ implanté en z est contenu tout entier dans A.

$$Z \in A \ominus B \Leftrightarrow (\check{B})_Z \subset A$$

Exemples

Reprenons les mêmes ensembles que précédemment

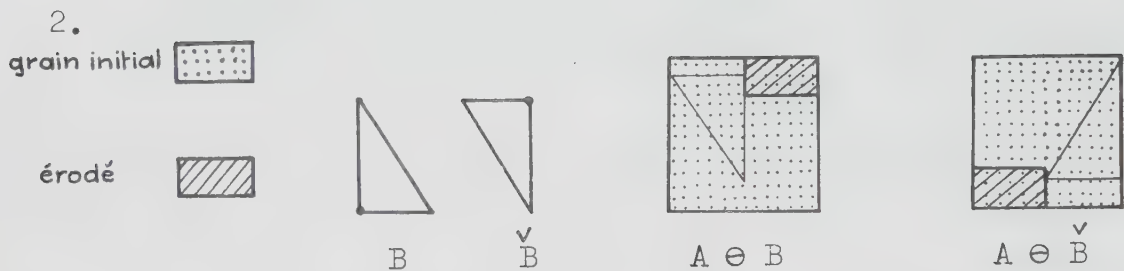
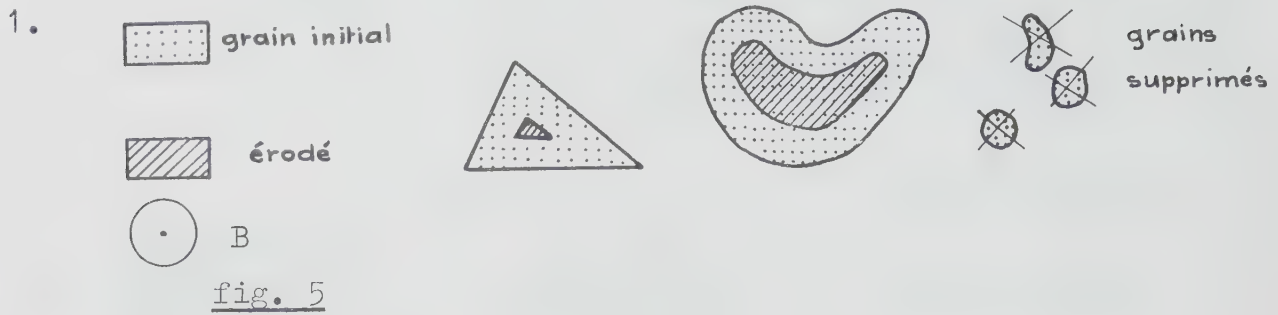


fig. 6

L'opération duale de la dilatation est l'érosion :

$$A \ominus \check{B} = (A^c \oplus \check{B})^c = \{z : Bz \subset A\}$$

éroder A par B c'est dilater son complémentaire par B.

Voici deux propriétés importantes :

$$(A \ominus B) \ominus C = A \ominus (B \oplus C)$$

$$(A \cap A') \ominus B = (A \ominus B) \cap (A' \ominus B)$$

3 - Ouverture et fermeture

Il est intéressant de faire subir à un ensemble A une succession de transformations élémentaires.

. L'érosion par B suivie d'une dilatation par B est nommée ouverture de A selon B et notée Aw_B :

$$Aw_B = (A \ominus \check{B}) \oplus B$$

. La dilatation par B suivie d'une érosion par B est nommée fermeture de A selon B et notée Af_B :

$$Af_B = (A \oplus \check{B}) \ominus B$$

Ouverture et fermeture sont des opérations duales l'une de l'autre : ouvrir les pores équivaut à fermer les grains, et réciproquement.
Soit :

$$(A^c) \omega_B = (Af_B)^c$$

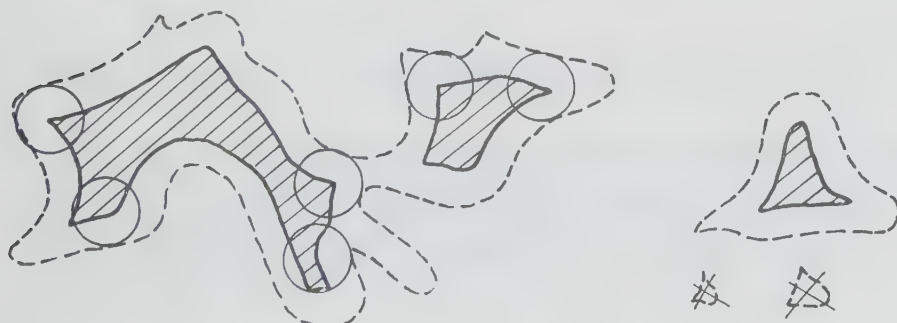
$$(A^c) f_B = (A \omega_B)^c$$

Exemple.

Soit un ensemble A, volontairement complexe, avec des angulosités, des étranglements, des petites composantes isolées. L'élément structurant est le cercle B.



1ère étape : érosion



l'érode est le volume balayé par le centre du cercle lorsque celui-ci se déplace par translation en restant contenu dans A

2ème étape : dilatation



L'ouvert est la surface totale balayée par le cercle dans les mêmes conditions.

Un géographe voyant A "en relief", comme des terres émergées, dirait que l'ouverture de A a rogné les caps et supprimé les isthmes et les petites îles ; regardant A "en creux", comme un espace maritime, il dirait que la fermeture de A^c a comblé les golfes, les détroits et les petits lacs. En creux ou en relief, grain ou pore, peu importe : A a été régularisé. L'ouvert en est en quelque sorte la partie principale selon B. Plus précisément :

$A\omega_B$ est le domaine balayé par les translatés de B auxquels on parcourt toutes les positions géométriquement possibles pour lesquelles il reste entièrement inclus dans A.

On peut vérifier sur la figure ci-dessus les 3 propriétés algébriques essentielles qui ont donné son nom à l'ouverture, à savoir d'être :

- décroissante : $A\omega_B \subset A$: l'ouvert est inclus dans l'ensemble initial.
- isotone : $A \subset A' \Rightarrow A\omega_B \subset A'\omega_B$: l'inclusion est stable par ouverture.
- idempotente : $(A\omega_B)\omega_B = A\omega_B$: l'ouverture d'un ensemble déjà ouvert est l'ensemble lui-même.

Par dualité, la fermeture est croissante, isotone et idempotente.

Grâce à ces propriétés de monotonie l'ouverture va pouvoir servir à bâtir des fonctions granulométriques, définies in situ, et dont la diversité sera celle des éléments structurants B eux-mêmes.

III - FONCTIONNELLES DE MINKOWSKI

Les opérations précédentes transforment l'image ; il reste à la quantifier. Le volume, la surface, le périmètre, le nombre sont

autant de procédés et plus généralement toute "fonctionnelle", application d'une famille de parties de R^n dans l'ensemble des réels.

Parmi celles-ci les fonctionnelles de Minkowski jouent grâce à leurs "bonnes propriétés" un rôle privilégié. Définies par récurrence sur la classe des ovoïdes (ensembles fermés, bornés, convexes) ces (n+1) fonctionnelles W_i sont en effet :

- . invariantes par déplacement
- . homogènes de degré n-i : $W_i(\lambda A) = \lambda^{n-i} W_i(A)$
- . définies positives : $W_i(A) \geq 0$
- . monotones : $A \subset B \Rightarrow W_i(A) \leq W_i(B)$
- . bornées : pour tout cube W contenant A il existe une constante C
 $W_i(A) \leq C$
- . continues : $A_n \rightarrow A \Rightarrow W_i(A_n) \rightarrow W_i(A)$ (au sens de la métrique de Hausdorff).
- . additives : $A, B, A \cup B \in \mathcal{H} : W_i(A) + W_i(B) = W_i(A \cup B) + W_i(A \cap B)$

Dans l'espace (R^3) et le plan (R^2) les fonctionnelles de Minkowski nous sont bien familières :

$$\begin{array}{l} R^3 \left\{ \begin{array}{l} W_0(A) : \text{volume de } A \\ 3 W_1(A) : \text{surface de } A \\ 3 W_2(A) : \text{intégrale de la courbure} \\ \quad \text{moyenne de } A * \\ W_3(A) : \frac{4}{3} \Pi \rightarrow \text{le nombre} \end{array} \right. \quad R^2 \left\{ \begin{array}{l} W_0(A) : \text{surface de } A \\ 2 W_1(A) : \text{périmètre de } A \\ 3 W_2(A) : \Pi \rightarrow \text{nombre} \end{array} \right. \end{array}$$

* l'intégrale de la courbure moyenne est $\alpha = \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) ds$;

R_1 et R_2 rayons de courbures principaux et intégration étendue à la sphère. α est proportionnel au diamètre apparent moyen D_0 ($= \frac{\alpha}{2\Pi}$)

Deux théorèmes fondamentaux de la géométrie des ovoïdes ont un intérêt stéréologique *.

1 - Le théorème des projections relie les fonctionnelles de A à celles de ses projections sur des i-plans **. Plus précisément la fonctionnelle W_{n+v-i} d'ordre $n+v-i$ est une valeur moyenne de la fonctionnelle W'_v agissant sur les contours apparents de A dans toutes les directions possibles. ($0 \leq v \leq i \leq n-1$). Pour fixer les idées prenons $n = 3$ et $i = 2$ (plan) : les fonctionnelles W_{1+v} pour $0 \leq v \leq 2$ soit W_1 , W_2 et W_3 , surface, diamètre moyen et nombre s'obtiennent respectivement à partir des surfaces, périmètre et nombre, de leurs projections sur des plans. De même à partir de droites de l'espace ($i = 1$) on atteint W_2 et W_3 .

En négligeant les coefficients de proportionnalité on peut résumer ceci par le tableau suivant :

	W_0	W_1	W_2	W_3
ESPACE	VOLUME	SURFACE	COURBURE MOYENNE	NOMBRE
PLAN	SURFACE	PERIMETRE	NOMBRE	
DROITE	LONGUEUR	NOMBRE		

Il apparaît que le volume d'un ovoïde ne peut s'obtenir à partir de ses projections.

2 - Le théorème des traversées (Formule de CROFTON) relie les fonctionnelles de A à celles de ses sections par des i-plans. La fonctionnelle $W'_v(A)$ ($0 \leq v \leq i < n$) et une valeur moyenne de la fonctionnelle W'_v agissant sur les sections de A par tous les i-plans possibles. Ces relations peuvent se représenter par le tableau :

* Détermination de caractéristiques géométriques d'un solide à partir d'observations effectuées dans un espace de dimension inférieure.

** Un i-plan est un sous-espace de R^n de dimension i.

	W_0	W_1	W_2	W_3
ESPACE	VOLUME	SURFACE	COURBURE MOYENNE	NOMBRE
PLAN	↑ SURFACE	↑ PERIMETRE	↑ NOMBRE	
DROITE	↑ LONGUEUR	↑ NOMBRE		

Les passages ne sont possibles que sur les fonctionnelles de même rang.

Une conclusion intéressante : à partir de mesures effectuées en section plane on peut atteindre toutes les fonctionnelles de l'espace sauf le nombre.

Pour être tout à fait rigoureux il faut se souvenir que les fonctionnelles de Minkowski n'ont été jusqu'ici définies que sur les ovoïdes*. Mais la théorie montre qu'on peut les prolonger à des classes plus vastes en étant moins exigeant sur leurs propriétés. En tout cas de nombreux résultats ont une valeur générale : calcul de la surface ou du volume par exemple. Et bien sûr ce qui est stéréologiquement impossible pour les convexes l'est a fortiori pour des ensembles quelconques.

IV - MILIEUX POREUX ALEATOIRES

La complexité de détail des milieux poreux et leur monotonie apparente à une échelle supérieure appelle naturellement l'emploi d'un langage probabiliste.

1 - Loi spatiale et moments fonctionnels

Un milieu poreux défini par la donnée de l'ensemble A des grains ou de l'ensemble complémentaire A^c des pores est maintenant considérée comme aléatoire. Autrement dit c'est A en tant qu'ensemble qu'il est aléatoire ou, ce qui revient au même, sa fonction caractéristique $f(x)$, égale à 1 si $x \in A$ et à 0 si $x \in A^c$, qui est une fonction aléatoire à valeurs 0 ou 1.

* Sur un ensemble quelconque de R^3 la surface par exemple n'est ni bornée ni monotone.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_k$ et $y_1, y_2, \dots, y_{k'}$ deux groupes de k et k' points quelconques de l'espace R^n . On désigne par :

$$P(x_1, x_2, \dots, x_k ; y_1, y_2, \dots, y_{k'}) = \text{Prob}\{x_1, \dots, x_k \in A; y_1, \dots, y_{k'} \in A^c\}$$

la probabilité pour que les k points $x_1 \dots x_k$ appartiennent à A et que les k' points $y_1, \dots, y_{k'}$ n'appartiennent pas à A . Cette probabilité est une fonction de ces $k+k'$ points, donc une fonction de $n(k+k')$ variables. L'ensemble de toutes ces fonctions, pour toutes les valeurs des entiers k et k' et tous les systèmes de points $x_1 \dots x_k$ et $y_1 \dots y_{k'}$, constitue la loi spatiale de l'ensemble aléatoire A . On admet que l'ensemble aléatoire A peut être considéré comme défini par la donnée de sa loi spatiale.

Pour $k' = 0$ la fonction

$$P(x_1 \dots x_k) = \text{Prob}\{x_1, x_2, \dots, x_k \in A\}$$

représentant la probabilité pour que k points donnés appartiennent à A est le moment fonctionnel d'ordre k de A . On appelle cette probabilité un "moment" car $P(x_1, \dots, x_k)$ n'est autre que l'espérance mathématique du produit $f(x_1)f(x_2)\dots f(x_k)$:

$$P(x_1 \dots x_k) = E[f(x_1)f(x_2)\dots f(x_k)]$$

Les moments fonctionnels des pores sont désignés par la lettre Q

$$Q(x_1 \dots x_k) = \text{Prob}\{x_1 \in A^c, \dots, x_k \in A^c\} = E[(1-f(x_1)) \dots (1-f(x_k))]$$

2 - Moments fonctionnels généralisés

La Théorie des Ensembles Aléatoires [2] enseigne qu'il est possible de définir la probabilité que deux ensembles B et B' soient contenus le premier dans les grains, le second dans les pores :

$$P(B, B') = \text{Prob}\{B \subset A, B' \subset A^c\}$$

B et B' peuvent avoir une infinité de points (segment, cercle) et en ce sens $P(B, B')$ généralise la loi spatiale $P(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_{k'})$.

En particulier :

$Q(B) = \text{Prob}(B \subset A^c) = \text{Prob}\{A \cap B = \emptyset\}$ est le moment fonctionnel généralisé des pores.

Ces moments fonctionnels reçoivent un contenu géométrique intuitif lorsqu'on prend pour B un ensemble contenant l'origine O et qu'on le considère comme un échantillon implanté en O . L'échantillon égal à B implanté au point x , c'est-à-dire le translaté Bx , conduit à définir les probabilités :

$$P(Bx) = \text{Prob}\{Bx \subset A\} = \text{Prob}\{x \in A \ominus B\}$$

$$Q(Bx) = \text{Prob}\{Bx \subset A^c\} = \text{Prob}\{x \notin A \oplus B\}$$

Mais telles quelles ces relations sont inutilisables, d'abord parce que dépendant de x elles donnent une information locale dont on n'a que faire et surtout parce que la donnée d'une seule réalisation de la fonction aléatoire ne permet pas de calculer ces probabilités.

L'hypothèse stationnaire lève ces objections.

3 - Cas stationnaire

On dit que l'ensemble aléatoire A possède le caractère stationnaire lorsque sa loi spatiale est invariante par translation, c'est-à-dire lorsque pour tout vecteur h et tout groupe de points $x_1 \dots x_k, y_1 \dots y_k$, on a :

$$P(x_1+h, \dots, x_k+h ; y_1+h, \dots, y_k+h) = P(x_1, \dots, x_k ; y_1, \dots, y_k)$$

Ce caractère stationnaire de A signifie que ses propriétés sont les mêmes dans tout l'espace. Il y a homogénéité spatiale. L'ensemble A se reproduit, statistiquement, dans tout l'espace, identiquement à lui-même. En principe c'est le seul cas pour lequel l'inférence statistique est possible. En pratique il suffira que A puisse être considéré comme "localement stationnaire", c'est-à-dire que ses caractéristiques ne varient que lentement dans l'espace.

L'estimation des moments fonctionnels à partir de données expérimentales disponibles dans un champ D s'effectue grâce aux formules :

(II,1)

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{1}{\text{Mes } D} E[\text{Mes}(A \ominus \overset{\vee}{B}) \cap D] \\ Q(B) &= \frac{1}{\text{Mes } D} E[\text{Mes}(A^c \ominus \overset{\vee}{B}) \cap D] \end{aligned}$$

L'hypothèse d'ergodicité permet de prendre $\text{Mes}(A \ominus \overset{\vee}{B}) \cap D$ comme estimateur de son espérance mathématique.

Ainsi par exemple le moment $Q(x)$ est une constante q dans le cas stationnaire. (puisque $Q(x+h) = Q(x) \forall h$). C'est la porosité du milieu poreux. On l'estime par le rapport :

$$\frac{\text{Mes}(A^c \cap D)}{\text{Mes } D}$$

Pareillement, dans le cas stationnaire, la covariance

$$Q(x_1, x_2) = Q(x_1+h, x_2+h)$$

ne dépend que de la différence $x_2 - x_1$. On notera $C(h) = Q(x, x+h)$ la covariance des points x et $x+h$, distants (vectoriellement) de h : elle ne dépend que du vecteur h et non du point d'appui x . On a :

$$C(h) = C(-h)$$

$$C(0) = q$$

$$0 \leq C(h) \leq q$$

D'un point de vue géométrique, on peut remarquer que $x+h$ appartient aux pores A^c si, et seulement si, x appartient au translaté A^c_{-h} de A^c pour le vecteur $-h$. Ainsi $Q(x, x+h)$ est aussi la probabilité pour que le point x appartienne à l'intersection $A^c \cap A^c_{-h}$ des pores et de leur translaté par $-h$. Dans le cas stationnaire on a donc :

(II,2)

$$C(h) = \frac{E[\text{Mes}(A^c \cap A^c_{-h} \cap D)]}{\text{Mes } D} = \frac{E[\text{Mes}(A^c \cap A^c_h \cap D)]}{\text{Mes } D}$$

Cette formule (II,2) n'est qu'un cas particulier de (II,1) : l'ensemble B est constitué des deux points x et x+h.

De manière analogue on évalue les probabilités d'évènements plus complexes. Par exemple :

(II,3)

$$\text{Prob}(x \in A\omega) = \frac{E[\text{Mes}(A\omega \cap D)]}{\text{Mes } D}$$

4 - Problèmes de champ

Raisonnons dans le plan.

La première des formules (II,1) par exemple nous invite à mesurer la surface des grains érodés présents dans un domaine D. Mais ce dont on dispose expérimentalement c'est l'ensemble $A \cap D$: les grains véritables présents dans le champ D. Il faut donc exprimer les relations d'inférence statistique en fonction de $A \cap D$.

Voyons les trois cas principaux : érosion, dilatation, ouverture.

a - érosion

En appliquant (II,1) dans le champ $D \ominus \check{B}$ au lieu de D on a :

$$P(B) = \text{Prob}\{x \in A \ominus \check{B}\} = \frac{E[\text{Mes}(A \ominus \check{B}) \cap (D \ominus \check{B})]}{\text{Mes}(D \ominus \check{B})}$$

$$\text{Or } (A \cap D) \ominus \check{B} = (A \ominus \check{B}) \cap (D \ominus \check{B})$$

d'où :

(II,4)

$$\text{Prob}\{x \in A \ominus \check{B}\} = \frac{E[\text{Mes}(A \cap D) \ominus \check{B}]}{\text{Mes}(D \ominus \check{B})}$$

Il faut éroder les grains présents dans le champ D, mesurer leur surface et la diviser par celle du champ érodé $D \ominus \check{B}$.

b - Dilatation

$$\text{Prob}\{x \in A \oplus \check{B}\} = 1 - \text{Prob}\{x \in A^c \ominus \check{B}\} = 1 - Q(B)$$

Il suffit d'appliquer a) aux pores.

On peut aussi obtenir le résultat directement en notant que :

$$(A \oplus B) \cap (D \ominus \check{B}) = (D \ominus \check{B}) - (A^c \cap D) \ominus \check{B}$$

c - ouverture

Montrons que :

$$(II,5) \quad \text{Prob}\{x \in A\omega_B\} = \frac{E[\text{Mes}(A \cap D)\omega_B \cap D \ominus (B \oplus \check{B})]}{\text{Mes}(D \ominus (B \oplus \check{B}))}$$

On a :

$$D \ominus (B \oplus \check{B}) = D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap A\omega_B + D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap (A\omega_B)^c$$

Or $(A\omega_B)^c = (A^c)f_B$, d'où :

$$D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap A\omega_B = D \ominus (B \oplus \check{B}) - D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap (A^c)f_B$$

de même :

$$D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap (A \cap D)\omega_B = D \ominus (B \oplus \check{B}) - D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap (A \cap D)^c f_B$$

$$\text{L'égalité : } D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap (A^c)f_B = D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap (A \cap D)^c f_B$$

établira la formule (II,5).

$$(A^c)f_B \cap D \ominus (B \oplus \check{B}) = (A^c \oplus \check{B}) \ominus B \cap (D \ominus \check{B}) \ominus B = [(A^c \oplus \check{B}) \cap (D \ominus \check{B})] \ominus B$$

Mais d'après la remarque de b)

$$(A^c \oplus \check{B}) \cap (D \ominus \check{B}) = (D \ominus \check{B}) - (A \cap D) \ominus \check{B}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } [(A^c \oplus \check{B}) \cap (D \ominus \check{B})] \ominus B &= D \ominus (\check{B} \oplus B) \cap [(A \cap D) \ominus \check{B}]^c \ominus B \\ &= D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap [(A \cap D)^c \oplus \check{B}] \ominus B \\ &= D \ominus (B \oplus \check{B}) \cap (A \cap D)^c f_B \end{aligned}$$

C.Q.F.D.

La formule (II,5) indique la marche à suivre pour mesurer une ouverture : il faut d'abord ouvrir l'image expérimentale $A \cap D$, puis

mesurer la surface de cette ouverture dans le champ érodé $D \ominus (B \oplus \overset{\vee}{B})$.

On pouvait trouver ce résultat de façon plus intuitive : l'érodé de A par B se mesure dans le champ $D' = D \ominus \overset{\vee}{B}$ d'après a) : le dilaté de $A \ominus \overset{\vee}{B}$ par B se mesure donc sur le champ $D' \ominus B = D \ominus (B \oplus \overset{\vee}{B})$.

Exemples

1 - B segment de longueur l : $\frac{l}{\bullet \text{---} \bullet}$
 B " " " : $\frac{\overset{\vee}{l}}{\bullet \text{---} \bullet}$

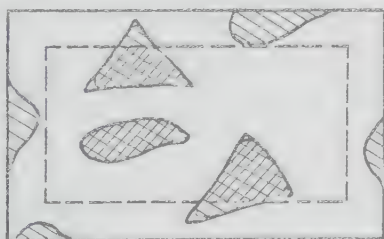
$$B \oplus \overset{\vee}{B} = \text{---} \bullet \text{---}$$



Les portions de grains situés aux frontières du champ D, qui ne présentent pas dans ce champ de traversées supérieures à l, sont éliminées par ouverture.

L'ouverture de $A \cap D$ ne représente pas une section arbitraire de $A \omega_B$ par un champ D. En revanche toute traversée supérieure à l d'un grain, même tronqué par les frontières de $D \ominus (l \oplus \overset{\vee}{l})$ sera prise en compte.

2 - B : cercle $B \oplus \overset{\vee}{B}$: cercle de rayon double



De manière générale les ouvertures vérifient les inclusions :

$$(A \cap D)_{\omega_B} \subset A_{\omega_B} \cap D_{\omega_B} \subset A_{\omega_B} \cap D$$

Si l'on néglige l'effet de bordure on sousestime la surface de l'ouvert.

CHAPITRE III

L'ANALYSEUR DE TEXTURES

(Prototype de FONTAINEBLEAU)

L'Analyseur de Textures* est un appareil opto-électronique d'analyse quantitative automatique pourvu d'une logique spécifique adaptée aux mesures que propose la Morphologie Mathématique.

Un exemple montrera très bien son principe de fonctionnement. Supposons qu'on veuille mesurer la covariance des pores sur une plage D. La méthode la plus naturelle est de plaquer une grille régulière sur l'image et de déplacer aux noeuds de celle-ci deux points solidaires distants de h en comptant le nombre de fois où ils tombent tous deux dans les pores. Le rapport du nombre d'essais favorables au nombre total d'essais est une estimation de la probabilité $C(h)$.

L'A.T. procède de la sorte par échantillonnage à maille régulière, à ceci près qu'il garde l'élément structurant fixe et fait défiler l'image par rapport à lui.

I - PRESENTATION DE L'APPAREIL

L'A.T. se compose de trois parties : un capteur, une unité de traitement, des systèmes de sortie.

1 - Capteur

Le capteur est une caméra de télévision équipée d'un tube "Plumbicon" qui présente une bonne linéarité de la couche photosensible et une tension de sortie directement proportionnelle à l'éclairement.

Son balayage est synchronisé, après division, par la base de temps à 10 MHz qui sert de référence à toute la logique de l'A.T.

On peut utiliser la caméra directement ou intercaler un système optique entre elle et l'objet à analyser : microscope, macro-dia, épидiascope. Les figures 1 et 2 représentent divers montages.

* - L'analyseur de textures est noté par la suite A.T.

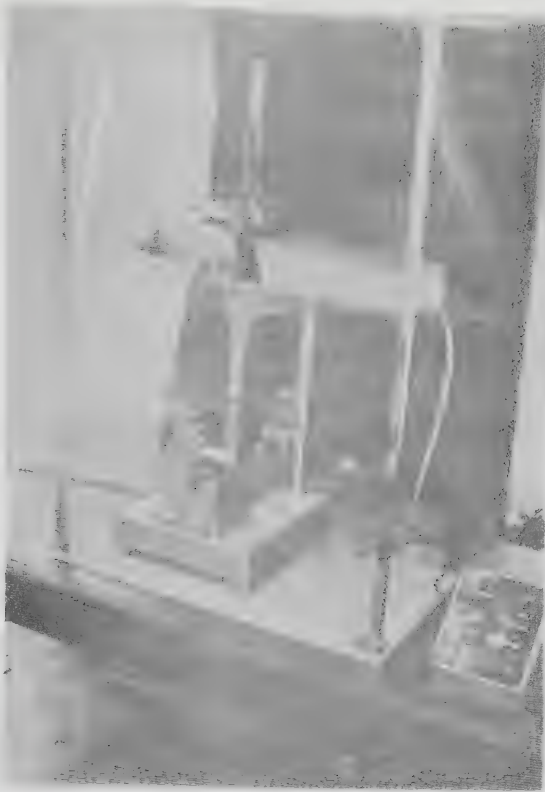


FIG 1

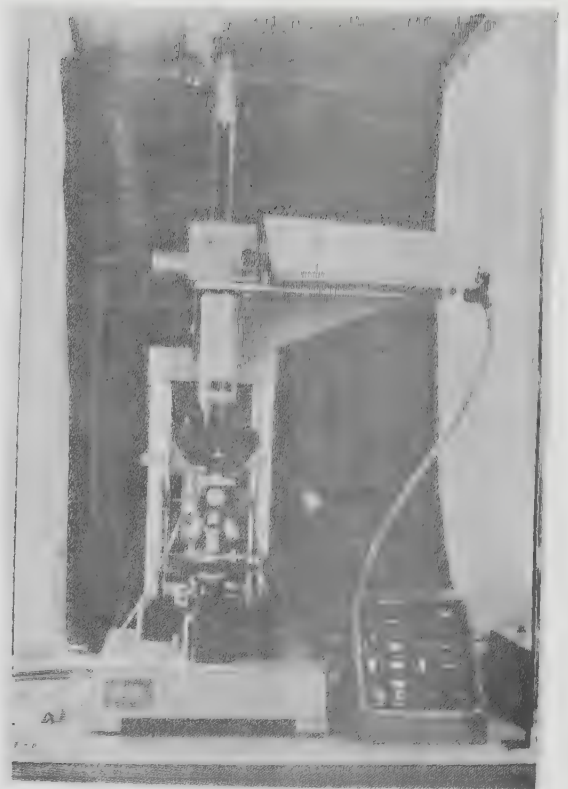


FIG 2

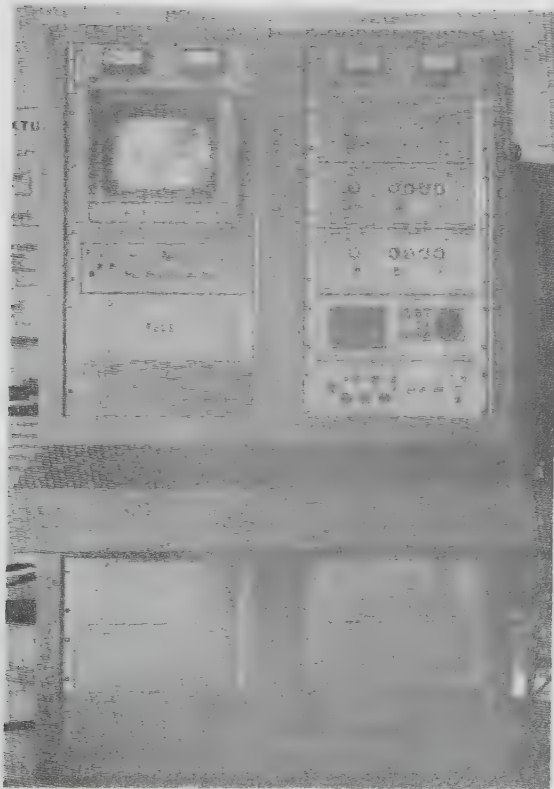


FIG 3

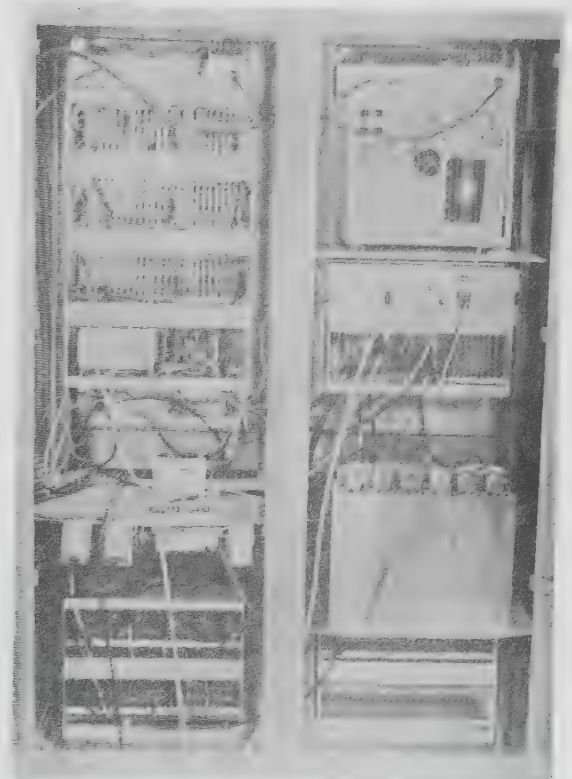
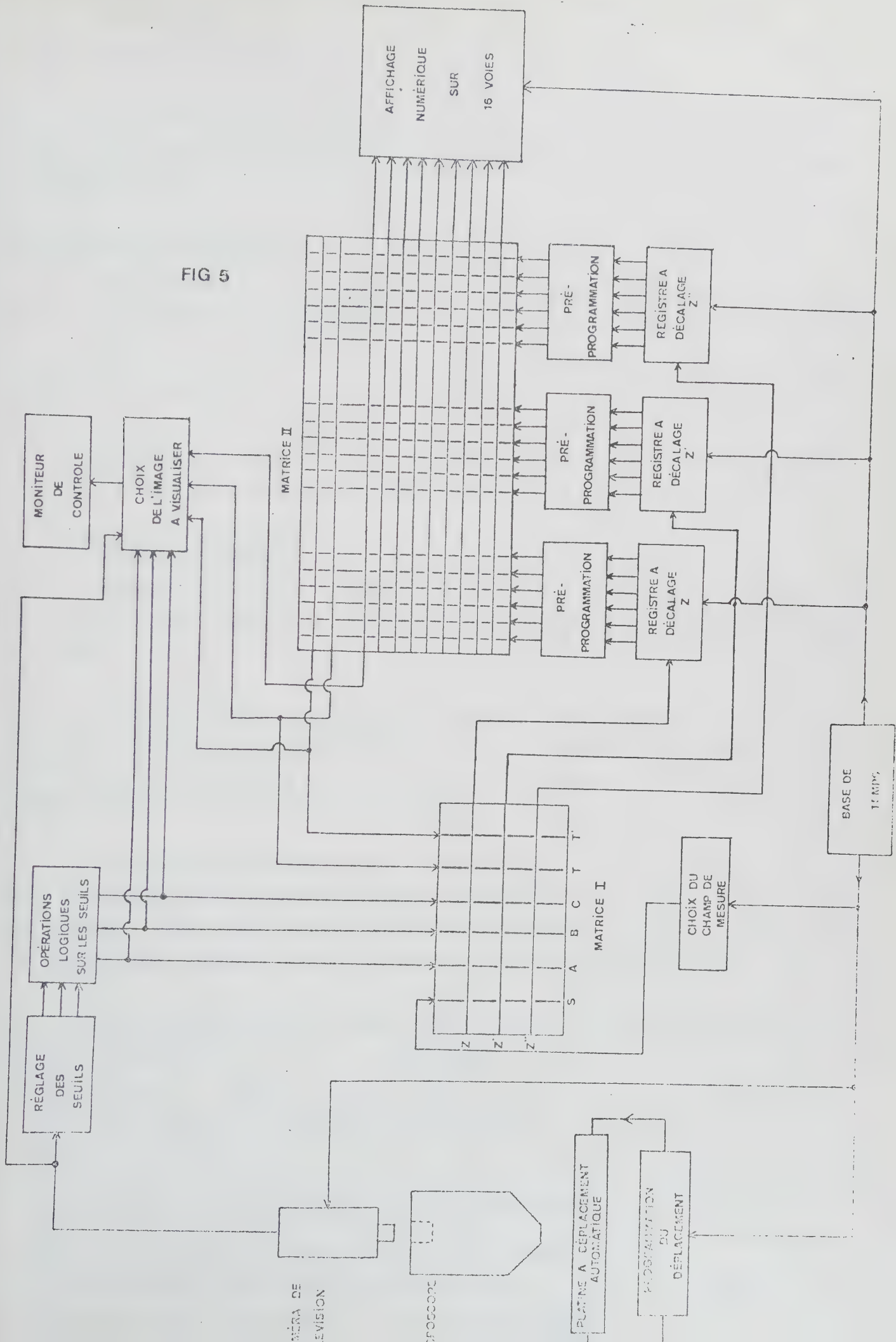


FIG 4

FIG 5



Le microscope est doté d'une platine à déplacement automatique qui commande le déclenchement des calculs de l'A.T.

A la place d'une caméra de télévision on projette d'utiliser comme capteurs une microsonde de CASTAING ou un microscope à balayage (Stéréoscan).

2 - Unité de traitement

Les figures 3 et 4 montrent l'aspect global extérieur et intérieur de l'unité de traitement.

Celle-ci comprend : les sélecteurs de gris (seuils), les registres à décalage et les lignes à retard.

La figure 5 représente le tableau synoptique de l'A.T. du moins dans sa version initiale. (En sont exclues les lignes à retard).

a - Sélecteurs de gris

Le vidéo-signal de la caméra subit une double discrétisation : la première par rapport à l'intensité lumineuse, la seconde par rapport au temps.

Un comparateur classe le vidéo-signal par rapport à un niveau de tension réglable par potentiomètre ; toute réponse de la caméra supérieure au niveau choisi est transformé en information binaire 1, et toute réponse inférieure en information 0.

L'information obtenue après discrétisation par rapport au temps est synchrone avec la base de temps à 10 MHz et peut être traitée par la logique. Aiguillée vers le moniteur de contrôle elle apparaît sous la forme d'une image à deux teintes seulement : noir ou blanc.

Voici par exemple un signal obtenu sur une préparation contenant deux constituants A et B.

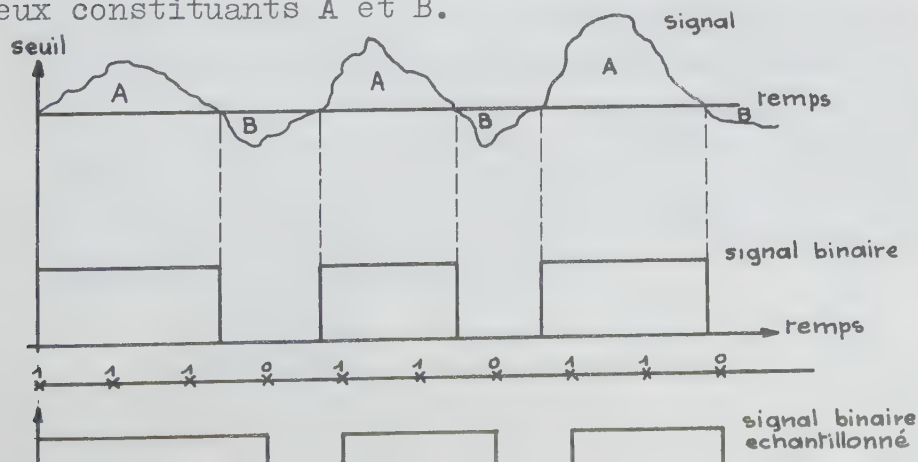


Fig. 6

. Choix des constituants

Tel qu'il est décrit le sélecteur de gris transforme par exemple en blanc toutes les zones plus claires que le niveau de référence et en noir toutes les zones plus sombres. Pour isoler des gris, qui sont des teintes intermédiaires, il faut combiner deux seuils. Portons en effet sur un axe vertical les intensités lumineuses croissantes : une zone de gris est intersection logique de deux domaines définis par deux seuils.

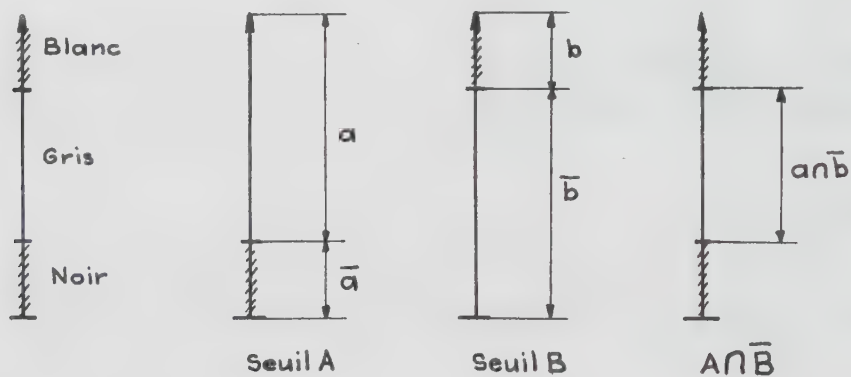


Fig. 7

COMBINAISON LOGIQUE DES SEUILS

L'A.T. possède 3 seuils A, B et C qui permettent donc d'étudier simultanément 4 constituants disjoints.

b - Registres à décalage

Comme l'indique le tableau 5 le signal binaire échantillonné sortant des seuils est envoyé sur une matrice de commutation (matrice qui le distribue vers 3 registres à décalage Z, Z' et Z'' constitués respectivement de 131, 131 et 38 mémoires.

Ces registres, qui forment la partie principale de la logique, sont composés de bascules bistables (flips-flops) capables de mémoriser une information binaire. Une séquence de 131 bascules permet donc de garder en mémoire 131 points consécutifs d'une ligne balayée par la caméra. A chaque impulsion de la base de temps une nouvelle donnée est introduite dans le registre, celles déjà présentes se décalent d'un rang vers la droite, la plus ancienne est éliminée.

Les sorties des mémoires sont reliées aux colonnes de la matrice II, programmable par fiche porte-diode (fig. 5). Les lignes de cette matrice, au nombre de 16, sont reliées à 16 voies de comptage par l'intermédiaire de portes ET. Une voie n'enregistre une impulsion que si toutes les sorties des bascules programmées sur la ligne correspondante sont excitées.

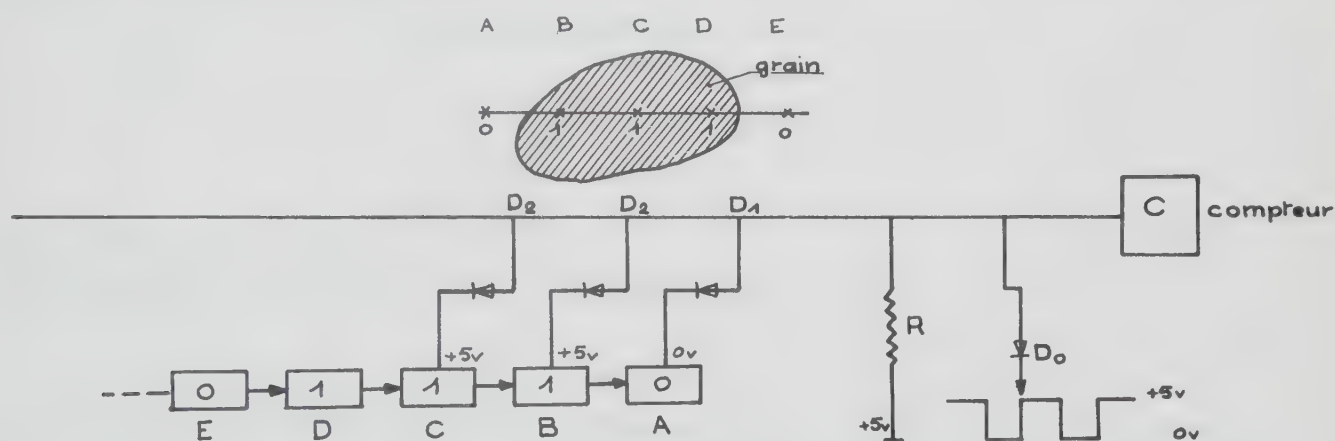


Fig. 12

La figure 8 schématise ce fonctionnement.

La ligne de la matrice est portée à la tension positive + 5 V. Son extrémité est reliée à l'horloge, par une diode D_0 , et au compteur C. Quand le signal de la base de temps est nul la d.d.p. appliquée aux bornes de la diode D_0 la rend conductrice : il y a débit dans la résistance R et le compteur reste au potentiel 0. Quand le signal de la base de temps passe à + 5 V la diode D_0 ne conduit plus. Le compteur C reçoit une impulsion si et seulement si aucune des diodes programmées D_1 , D_2 ou D_3 n'est conductrice, c'est-à-dire si les trois bascules affichent une tension de sortie de + 5 V, preuve qu'elles sont dans l'état 1. Sur l'exemple de la figure 12 il n'y aura pas comptage à l'instant T_1 puisque la diode fichée en A permet une décharge dans la résistance ; mais à l'instant $T_1 + 10^{-7}$ s les informations seront décalées vers la droite et le compteur tournera d'une unité.

Ce dispositif réalise une programmation fixe devant laquelle défilent toutes les informations prélevées sur l'échantillon analysé : 18 voies en parallèle (16 sur la matrice + 2 voies autonomes) permettent donc 18 programmations différentes et simultanées. (calcul d'une courbe en 18 points par exemple).

Les compteurs affichent les totaux correspondant aux diverses programmations. Pour obtenir des probabilités on divisera ces totaux, nombre de réponses affirmatives, par le nombre d'implantations possibles de l'élément structurant. L'A.T. est conçu pour travailler soit à nombre d'implantations fixe (100.000, 40.000 ou 20.000), soit à champ fixe et à nombre d'implantations variable. Dans ce dernier cas la technique consiste à construire un masque électronique en mêlant un "signal de champ" à l'information d'entrée des registres. Le nombre d'implantations possibles de l'élément structurant - c'est-à-dire le champ $Mes(D \ominus \bar{B})$ de la formule (II,4) - s'obtient par une mesure portant uniquement sur le signal de champ.

c - Lignes à retard

Les registres à décalage ne permettent de tester que des informations situées sur une même ligne.

Or nombre de mesures intéressantes nécessitent des éléments structurants bi-dimensionnels.

Pour garder en mémoire des points situés sur des lignes différentes on utilise des "lignes à retard", dispositifs qui donnent au signal un retard très exactement multiple de la durée séparant deux débuts de ligne (64 μ s).

Exemple : programmation d'un rectangle

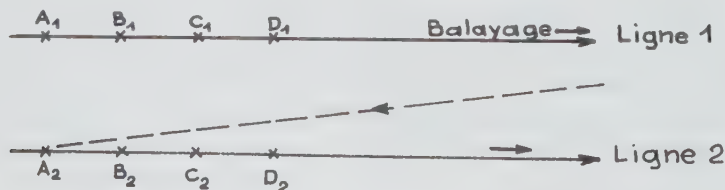


Fig. 13

Le signal S_t relatif à l'instant t est envoyé d'une part directement dans le registre Z' et d'autre part dans le registre Z par l'intermédiaire d'une ligne à retard. Les informations des bascules de Z et Z' , prises dans le même ordre, correspondent à des points d'une même colonne de l'image.

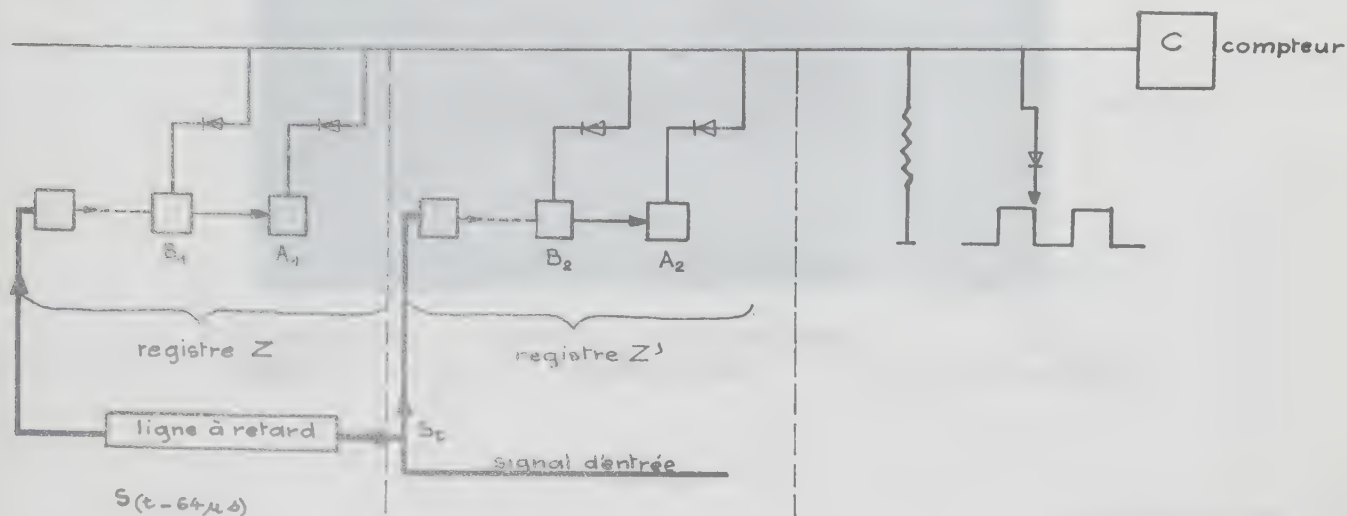


Fig. 14

3 - Systèmes de sortie

a - Affichage numérique

Les 16 voies de comptages, réparties en deux modules de 8, ont chacune une capacité de $10^8 - 1$. Les résultats apparaissent sur tubes "nixies", quatre par module. (voir photo fig. 3). Un contacteur sélectionne la voie à afficher ; son numéro s'inscrit sur un cinquième tube. Une autre commande fixe la précision de la lecture en choisissant les 4 chiffres à visualiser.

b - Autres sorties

Les résultats peuvent être envoyés sur un perforateur de bandes. Les bandes perforées sont traitées par une calculatrice-imprimante (type DIEHL par exemple) ou converties en cartes perforées pour le traitement sur ordinateur.

On utilise également une table traçante analogique soit directement en sortie des compteurs, soit en aval de la calculatrice.

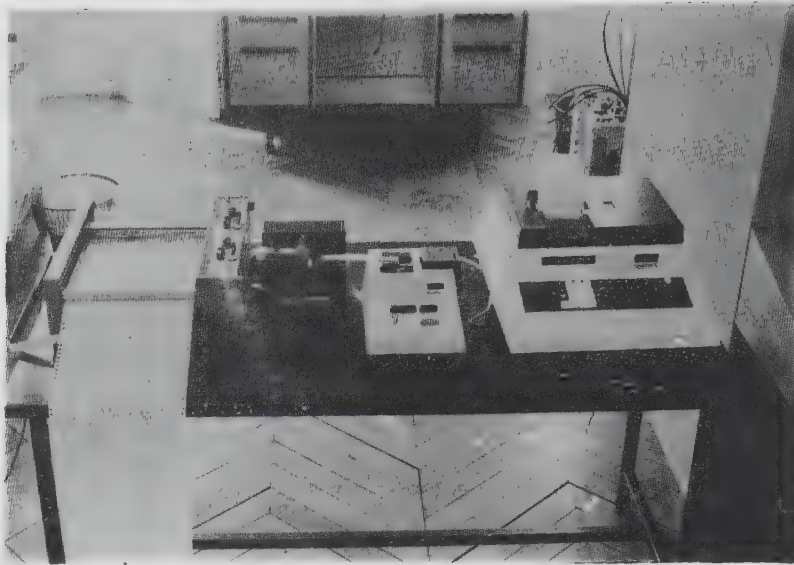


Fig. 15

table
traçante

perforateur lecteur
de bandes

calculatrice
DIEHL

II - PERFORMANCES

1 - Avantages de l'A.T. par rapport à un ordinateur

Entrée, calcul, sortie : on retrouve sur l'A.T. les 3 phases du traitement de l'information par l'ordinateur. Mais pourquoi avoir réalisé une logique spécifique ?

L'exemple introductif et la présentation de l'appareil ont montré qu'il n'est à aucun moment nécessaire de stocker en mémoire la totalité de l'image. Les calculs de la Morphologie Mathématique se réduisent à une succession de tests portant sur des informations qui n'interviennent qu'une seule fois au cours des opérations. Il est donc plus astucieux de faire transiter l'information dans une logique programmable que de la stocker d'abord pour la traiter ensuite. Dans l'absolu cette simplification limite le champ des investigations possibles mais pour celles de la Morphologie Mathématique elle confère à l'A.T. une grande supériorité.

Pour fixer un ordre de grandeur faisons effectuer à un calculateur IBM 360-40 le même calcul que l'A.T. : celui d'une covariance en 18 points avec 100.000 implantations par point. Ceci représente environ 130.000 informations élémentaires (0 ou 1) et 2 millions de tests.

Le stockage de l'image poserait déjà des problèmes. Avec un programme assembleur on pourrait s'arranger pour n'utiliser qu'un octet par l'information élémentaire, mais avec ses 100 K octets (102.400) la grande partition de la mémoire centrale ne pourrait suffire. Il

faudrait stocker sur disques ou bandes ce qui ne réduirait pas les temps d'accès.

Le calcul proprement dit serait la répétition de la séquence suivante :

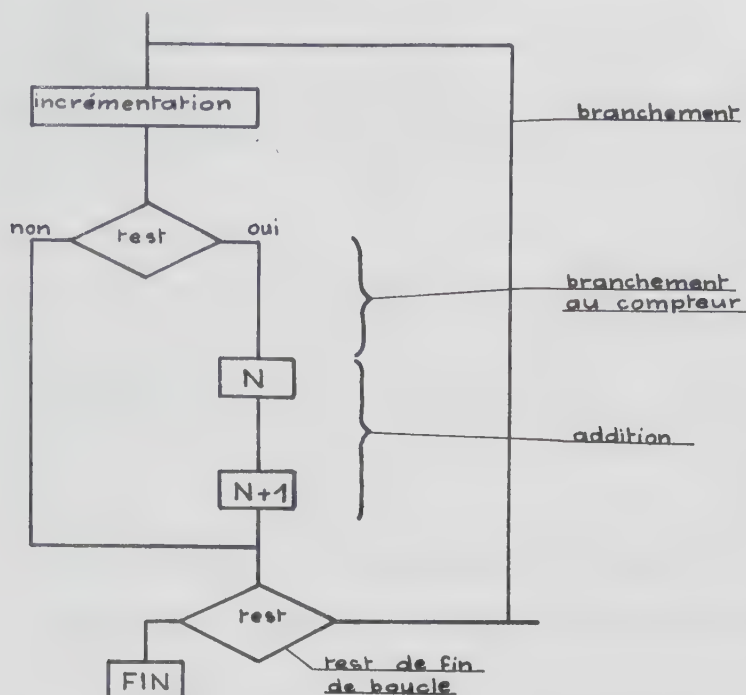


Fig. 16

Chaque opération test, branchement, addition, incrémentation prend environ 10 μ s. Un test positif entraîne donc 60 μ s de calcul et un test négatif 40 μ s. La covariance demanderait ainsi plus d'une minute et demie de calcul.

L'analyse d'un échantillon en 500 champs, comme il est courant pour la granulométrie de poudres nécessiterait le stockage de 65 millions d'informations et 14 heures de calcul d'IBM 360-40 !

2 - Programmes possibles

Grâce à sa logique programmable l'A.T. a des possibilités vastes. On ne peut en dresser la liste exhaustive, d'autant plus que l'appareil est appelé à être modulaire.

Voici les programmes usuels :

- . élément structurant sur une ligne : teneur, surface spécifique, covariance, granulométrie des traversées
- . " " " deux lignes: comptage, rayons de courbure, orientation des failles
- . " " plusieurs lignes: érosions et ouvertures hexagonales.

3 - Durée des mesures

Le temps de calcul de l'A.T. est de $1/50^{\circ}$ de seconde par image. Dans une série de mesures ce temps de calcul est négligeable devant l'intervalle séparant deux calculs. La durée globale d'une manipulation dépend :

- . du système de déplacement de l'échantillon
- . du nombre de plages et de leur espacement
- . de la stabilité de l'image seuillée
- . de la sortie des résultats
- . de l'habileté du manipulateur

Si l'on travaille par exemple sur un négatif photographique visualisé à la macro-dia le changement des plages est manuel et sa durée est fonction de la facilité de repérage des frontières des champs. Quand on observe au microscope on peut utiliser la platine à déplacement automatique qui réalise l'exploration exhaustive du champ d'une section mince. Une électronique de commande permet de régler le nombre de plages analysées et les distances inter-plages et interlignes (fig. 17). La séquence des mesures se déroule à volonté soit sans aucune intervention manuelle (déplacement et

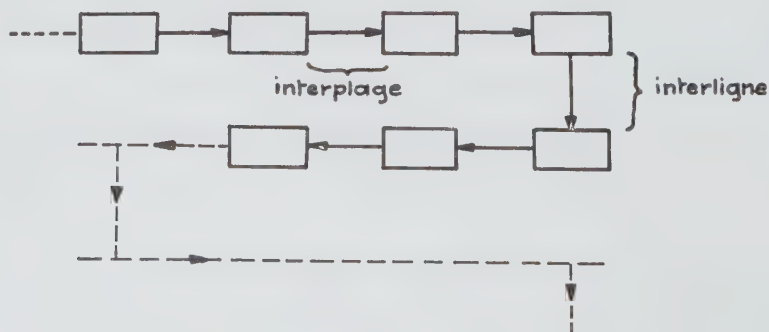


Fig. 17

déclenchement des compteurs), soit de manière semi-automatique avec arrêt sur chaque plage pour permettre au manipulateur de contrôler et éventuellement corriger l'image seuillée avant de déclencher le comptage.

La platine se déplace à la vitesse de 1,5 mm/seconde. Sur chaque champ elle s'immobilise 1/2 seconde. Ces données permettent de calculer la durée d'investigation d'un échantillon, en utilisation automatique, en fonction du nombre de plages et de leur espacement.

Le choix entre l'automatisme intégral ou partiel de la platine est dicté par la planéité et la régularité de coloration de l'échantillon. Si sa surface est parfaitement plane la mise au point de l'objectif sera faite une fois pour toutes ; si sa coloration est régulière le niveau du seuil n'aura pas à être modifié. La technique de visualisation en fluorescence ne satisfait encore cette seconde condition : sur 100 plages l'écart entre des mesures de porosité automatique et semi-automatique est de 3 % à 4 % (de porosité).

Jusqu'à présent une grande perte de temps était de lire les résultats sur les nixies et de les consigner par écrit. Noter les résultats sur toutes les voies prend environ 1 minute. Avec le perforateur de bandes ce temps est réduit à 2 secondes. Un tel progrès permettra de noter des résultats intermédiaires : porosités des différentes plages par exemple.

Après ces remarques voici à titre indicatif les durées effectives de mesures courantes. (tout compris : réglage des seuils, vérifications diverses, etc...)

	nombre de plages par échantillon	Platine	Durée
Granulométrie de poudres	500	automatique	10 à 15 mn
Covariance ou granulométrie de pores	100	semi-automatique	20 mn
En fluorescence	30		10 mn
Négatif photo à la macro-dia (ex : p.p.s.)	1		1 mn

N.B. Chaque plage est bien entendu échantillonnée par plus de 100.000 pointés ; 100 plages représentent plus de 10 millions de points.

4 - Précision des mesures

a - Pouvoir de résolution

Dans la technique de la télévision on désigne ainsi le nombre maximum de traits par ligne qu'on peut distinguer sur l'image d'une mire formée de bandes équidistantes, alternativement blanches et noires

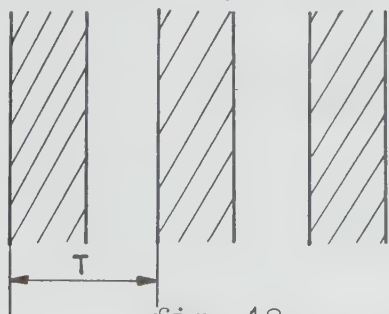


fig. 18

(fig. 18). Rapporté à la durée séparant deux tops de début de ligne ($64 \mu s$) ce nombre indique la bande passante de la caméra.

La caméra PHILIPS équipant l'A.T. a une bande passante de 5 MHz : les traits du réseau périodique n'apparaîtront distincts que si la période du réseau est supérieure à $\frac{1}{5 \cdot 10^6} = 200$ ns (nanosecondes) ; sinon l'image sera d'un gris flou. Par conséquent un objet ne sera "vu" par la caméra que s'il présente dans le sens du balayage une traversée supérieure à $\frac{T}{2} = 100$ ns.

Mais pour que cette succession de noirs et de blancs ne soit pas dénaturée par l'échantillonnage il faut que son pas, intervalle entre deux points consécutifs, soit au plus égal à la demi-période $\frac{T}{2}$. (Fig. 19)

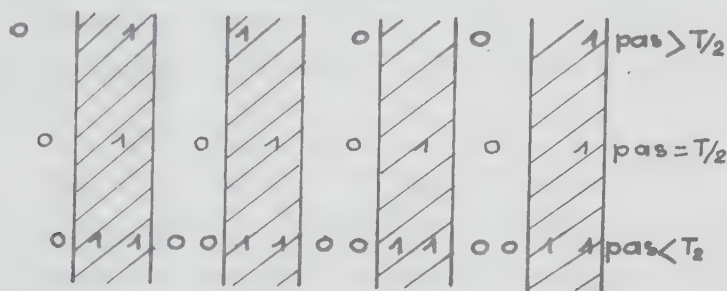
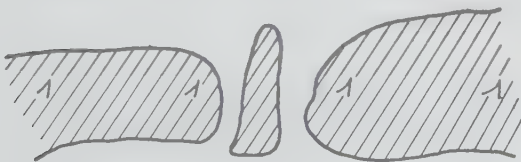


Fig. 19

Dans ce cas on a l'assurance qu'il ne peut y avoir plus d'une frontière entre deux points consécutifs. Cette condition est capitale si l'on veut programmer des éléments structurants infinis comme le segment de droite. En effet remplacer le segment par des points c'est admettre qu'entre deux points consécutifs dans le même constituant il ne peut y avoir de discontinuité. Cette hypothèse est vérifiée sur l'A.T. dont la fréquence d'échantillonnage est de 10 MHz (d'où un pas de 100 ns).



Par exemple la configuration de la figure ci-contre est impossible car le petit grain du milieu ne serait pas restitué par la caméra.

Fig. 20

Conclusions

- La longueur minimum des objets analysés est de 1 pas.
- On peut effectivement programmer des éléments structurants infinis par un ensemble de points.

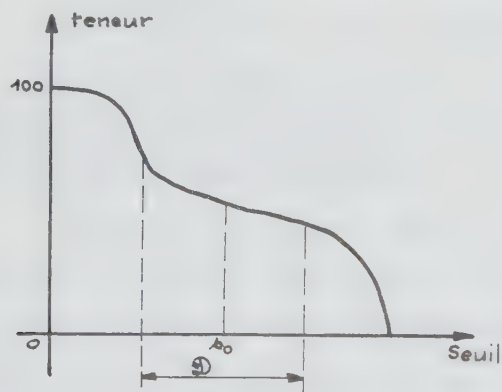
b - Réglage des seuils

Le véritable objet d'étude de l'A.T. n'est pas l'échantillon lui-même mais son image restituée par la caméra T.V. Le réglage des seuils consiste à isoler dans cette image les zones qui correspondent au constituant voulu. C'est l'opération la plus importante et la plus délicate de toutes. Malgré le soin qu'on y met le réglage est toujours entaché d'une incertitude dont nous allons montrer qu'elle est équivalente à de petites érosions ou dilations linéaires du constituant.

• Modèle général

On suppose qu'il existe un réglage du seuil s_0 donnant une image correcte A_{s_0} du constituant étudié, autrement dit que l'étude à l'A.T. est possible. A un niveau s peu différent de s_0 correspond une autre image A_s . On caractérise l'écart de A_s à A_{s_0} par l'erreur sur sa surface, ou sur sa teneur : $|t(A_s) - t(A_{s_0})|$.

Les variations de la teneur en fonction du niveau du seuil sont portées sur une courbe "seuil-teneur".



L'expérience montre que la zone d'indétermination est située sur une partie linéaire de la courbe, qu'on représente par l'équation :

$$(III,1) \quad t(s) = \alpha(s-s_0) + t_0 \quad \alpha \leq 0$$

Considérons maintenant une transformation géométrique $\mathcal{E}_\lambda$, dépendant d'un paramètre λ , transformant A en A_λ .

Soit $t(\lambda, s)$ la fonction à deux variables représentant

à λ fixé la courbe seuil-teneur de A_λ

à s fixé la teneur des transformés A_λ

On a :

$$d[t(\lambda, s)] = \frac{\partial t}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial t}{\partial s} ds$$

(III,1) signifie que pour $s \in \mathcal{D}$: $\frac{\partial t}{\partial s} = \alpha$

Supposons (hypothèse $\mathcal{H}$) que la transformation $\mathcal{C}_\lambda$ est linéaire en λ : dans un voisinage de 0 $\frac{\partial t}{\partial \lambda} = \beta$. Alors :

(III,2)

$$d[t(\lambda, s)] = \beta d\lambda + \alpha ds$$

Cette relation indique qu'une même variation de teneur résulte d'un déplacement ds du seuil ou d'une transformation géométrique de l'image $\mathcal{C}(\frac{\alpha}{\beta} ds)$.

Graphiquement elle se traduit par le parallélisme des courbes $t(\lambda, s)$ à λ fixé petit et $s \in \mathcal{D}$.

. Application

L'érosion ou la dilatation par un segment ou un cercle vérifient $\mathcal{H}$.
Pour le segment :

$$t(\lambda, s) = t(0, s) + \lambda D_\alpha$$

où D_α : variation diamétrale/unité de surface et $\lambda < 0$ pour une érosion et > 0 pour une dilatation.

En guise de test on a mesuré sur une image les courbes seuil-teneur des érodés et dilatés par des segments de longueur 1, 2, 3, 4 et 5 pas. Les courbes, portées sur la figure 21, présentent bien un domaine où le parallélisme est vérifié, et ce d'autant mieux que λ est petit.

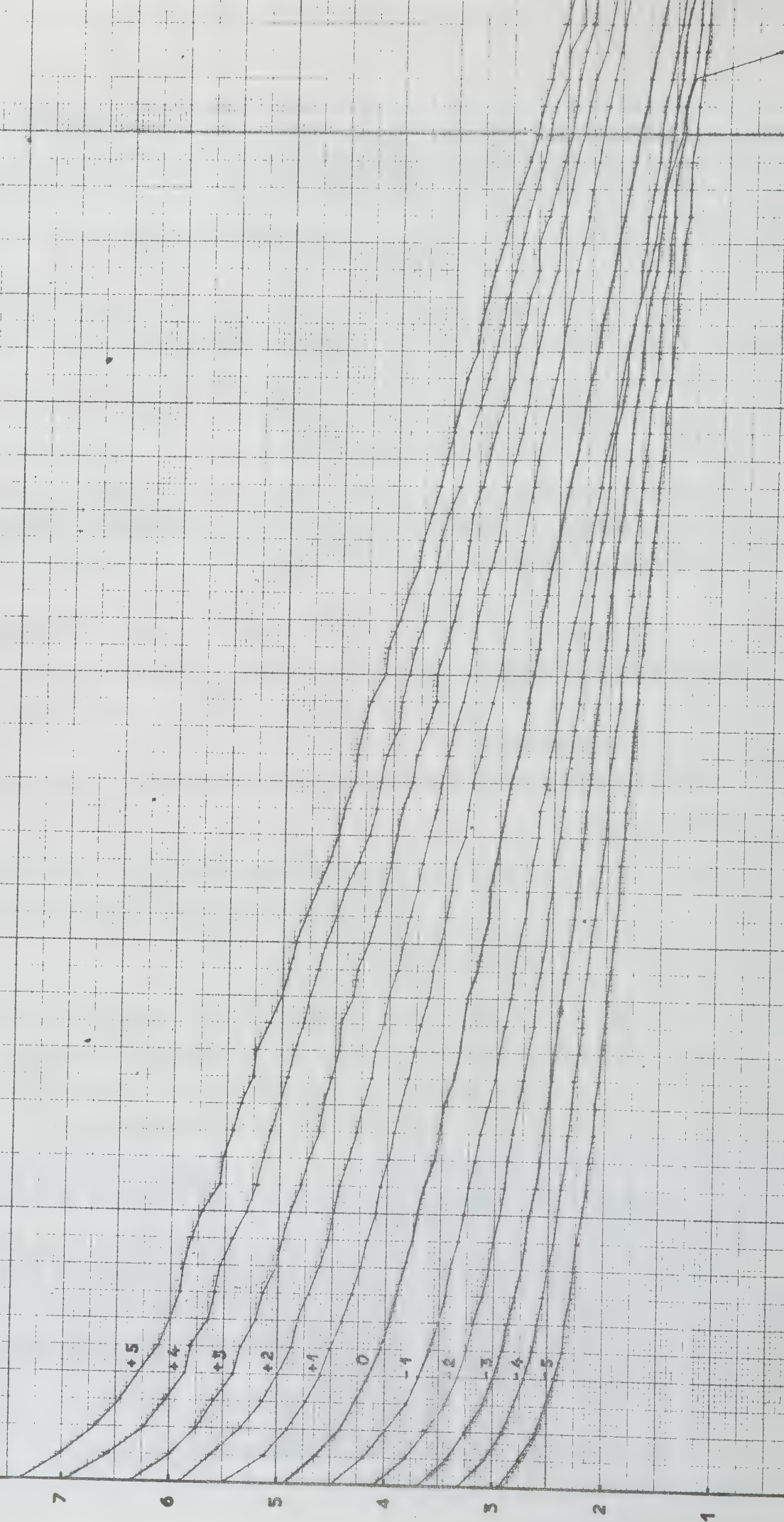
Sachant que dans le cas isotrope la surface spécifique est $4 D_\alpha$ on peut conclure :

L'erreur sur la teneur, due au réglage des seuils est proportionnelle à la variation diamétrale de l'image dans la direction du balayage ; lorsque le milieu est isotrope l'erreur est donc proportionnelle à la surface spécifique.

En pratique l'incertitude s'estimera à partir de la précision évaluée en pas. Par exemple si l'on considère pouvoir régler l'image "au pas près" :

FIG. 21

COURBES SEUIL-TENEUR
DES ÉRODÉS ET DILATÉS
D'UNE MEME IMAGE



(III,3)

$$(\Delta t) = \frac{1}{\alpha} C'_\alpha(0)$$

(dérivée de la covariance
expérimentale exprimée
en pas)

CHAPITRE IV

VISUALISATION DU RESEAU POREUX EN VUE DE SON ETUDE A L'ANALYSEUR DE TEXTURES

La mise au point d'une technique de visualisation des pores efficace pour leur analyse à l'A.T. a constitué la partie la plus longue du présent travail et en est sans doute le résultat le plus immédiat.

Avant d'exposer en détail cette technique il est utile de souligner les problèmes particuliers qui se sont posés et de faire un tour d'horizon des méthodes qu'on aurait pu envisager.

I - LES PARTICULARITES DE L'ANALYSE AUTOMATIQUE

Entre la perception de l'oeil humain et celle de l'analyseur de textures il y a, pourrait-on dire, une différence à la fois de "hardware" et de "software".

1 - Oeil humain et caméra de télévision

En tant que récepteur l'oeil est sensible à la couleur et à l'intensité lumineuse. De manière plus précise : étant donné deux plages lumineuses voisines de même couleur, soit qu'il s'agisse d'une même lumière monochromatique, soit qu'il s'agisse de radiations monochromatiques composées dans les mêmes proportions et donnant la même impression de teinte - l'oeil peut juger l'égalité ou l'inégalité des intensités lumineuses. Mais il est incapable d'évaluer leur rapport. Si les plages ont des couleurs différentes l'oeil n'a jamais l'impression d'égalité. A puissance lumineuse constante il réagit différemment aux diverses radiations comme l'indique la courbe de coefficient de visibilité de la figure 1. (Maximum dans le vert pour $\lambda = 5560 \text{ \AA}$). Comparons avec la courbe de réponse spectrale du tube "Plumbicon" équipant la caméra de télévision : il y a décalage vers la gauche, le maximum de sensibilité se situe dans le bleu vers $\lambda = 4750 \text{ \AA}$ et le rouge est très vite éliminé. Mais on raisonne ici à puissance constante. Or l'intensité du signal de sortie de caméra (vidéo-signal) a un moment

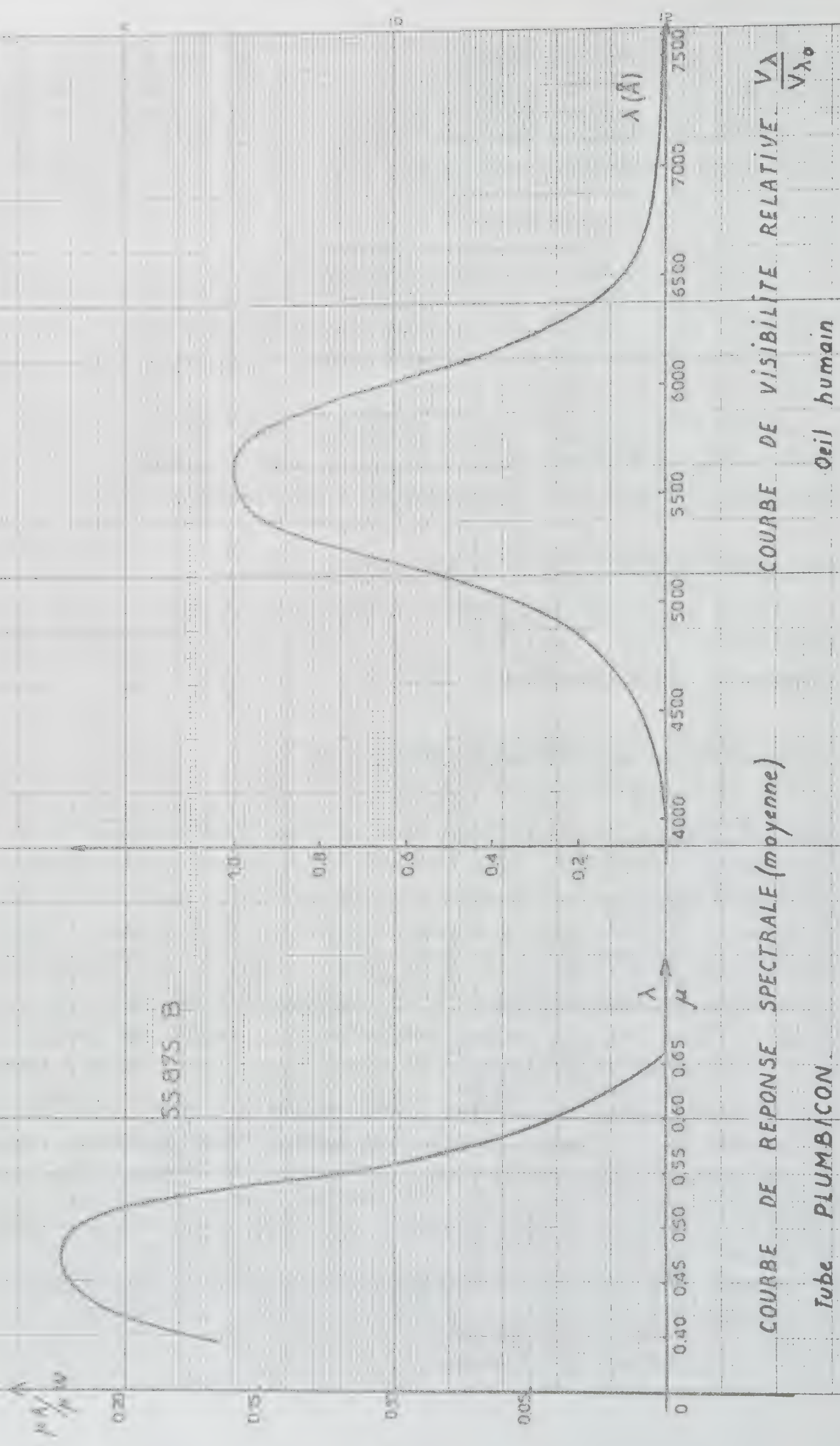


fig: 1

donné dépend à la fois de la composition spectrale et de l'intensité lumineuse de la lumière émise par le point correspondant de l'image. La différenciation strictement chromatique n'est pas possible.

2 - Cerveau humain et seuils

La supériorité de l'oeil humain se manifeste aussi sur un autre plan. Derrière l'oeil conçu en tant que récepteur se trouve une "logique" incomparable : le cerveau humain. Il sait tantôt être sélectif tantôt intégrateur. Là où quelques points sombres ou quelques stries de polissage altèrent la blancheur d'un grain de quartz l'oeil sait ignorer les parasites. Au contraire là où manque une portion du fin liseré noir qui marque un contour de grain il sait ajouter ce qu'il faut. Ce n'est pas une perception brute mais une reconnaissance de forme, c'est-à-dire une synthèse extraordinairement subtile de l'information reçue.

L'A.T. travaille d'une manière analytique simple et précise, à l'aide de seuils. La frontière entre deux grains vient-elle à s'estomper ? L'appareil n'a aucun moyen de les distinguer. Toutes les différences doivent être sensibles aux seuils. Ce sont eux qui sélectionnent l'image envoyée ensuite à l'unité de traitement. Et le problème en définitive est de donner aux constituants un contraste tel qu'il soit possible de les mettre en correspondances biunivoques avec différentes bandes de gris.

3 - Un critère : la courbe seuils-teneurs

Considérons le vidéo-signal représenté par la figure 2. Suivant le niveau où l'on place le seuil, par exemple 1, 2, 3 ou 4 on obtient des tensions de sortie ayant en principe l'allure 1, 2, 3 ou 4. Mais cette allure peut varier de manière continue. Le signal est à peu près quelconque et la position des seuils impose une sélection arbitraire.

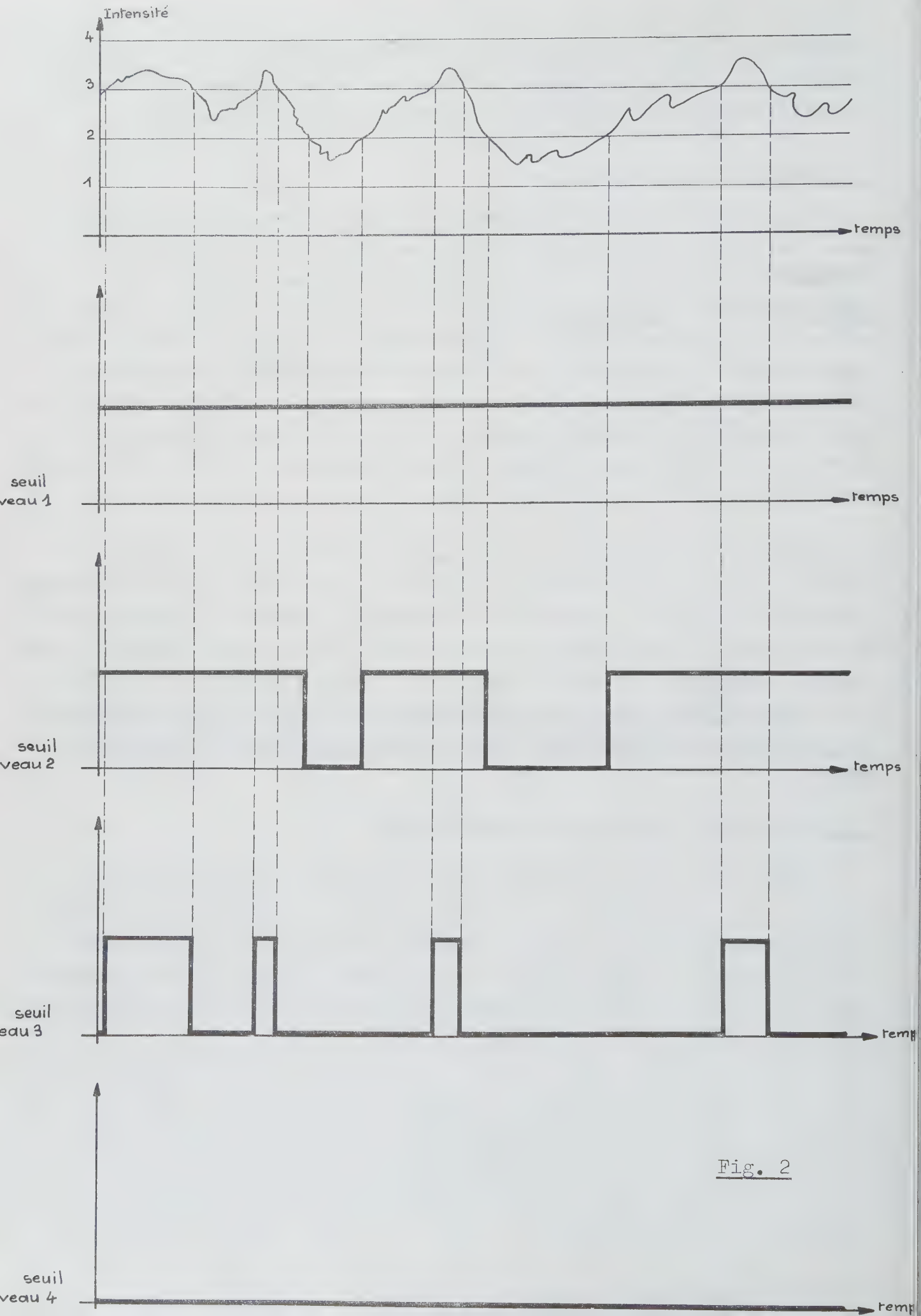


Fig. 2

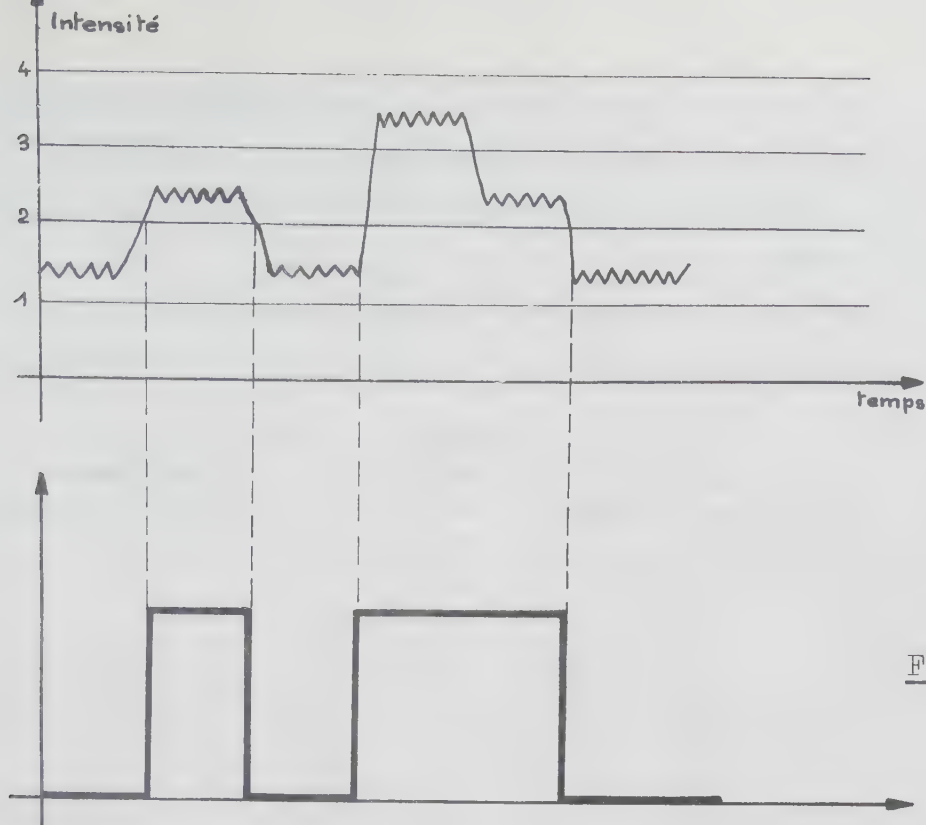


Fig. 3

Au contraire si le signal d'entrée est celui de la figure 3 il n'y a que 4 possibilités pour le signal seuillé et elles correspondent visiblement à des intensités bien distinctes du courant. Placé au niveau 2 par exemple le seuil élimine tous les noirs.

Pour caractériser les variations de l'image seuillée en fonction du niveau du seuil on trace une courbe seuils-teneurs. A partir d'une position du seuil donnant une image totalement blanche on modifie le réglage du seuil et on mesure à chaque fois la teneur : on obtient une courbe décroissant de 1 à 0. (ou croissant de 0 à 1 si l'on part d'une image noire) la qualité du contraste se traduit par la largeur des paliers, zones de réglage du seuil où la teneur varie peu. Le cas idéal serait d'obtenir des courbes seuils-teneurs avec des discontinuités du type fig. 4.

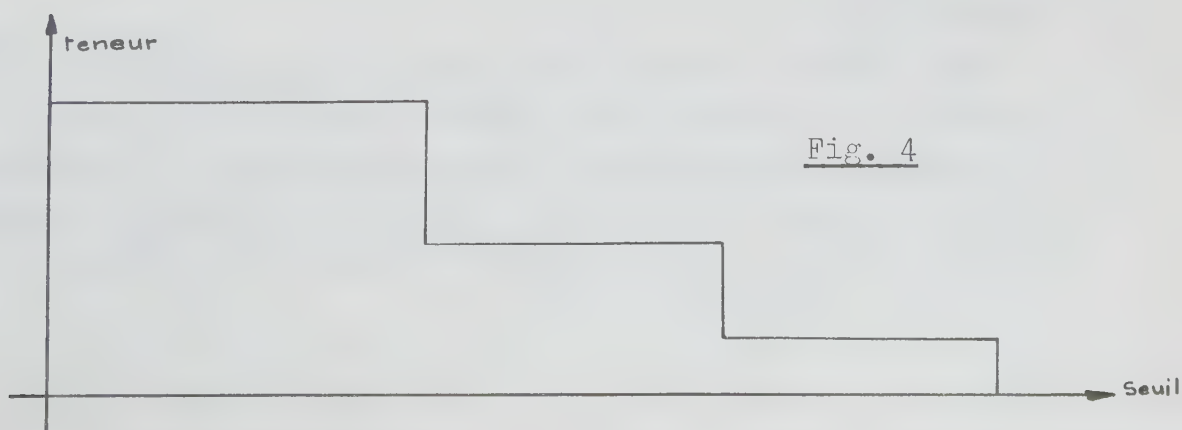


Fig. 4

Pour toutes sortes de raisons optiques et électroniques les courbes réelles ne sont pas si tranchées. Les figures 5 et 6 correspondant à des images fabriquées, montrent ce qu'on peut attendre dans les meilleurs cas.

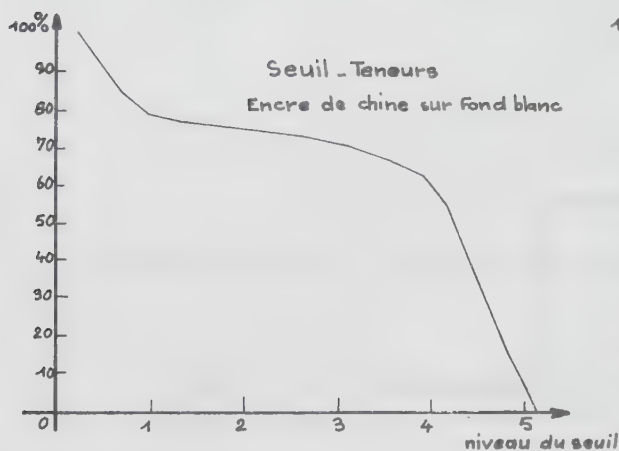


Fig. 5

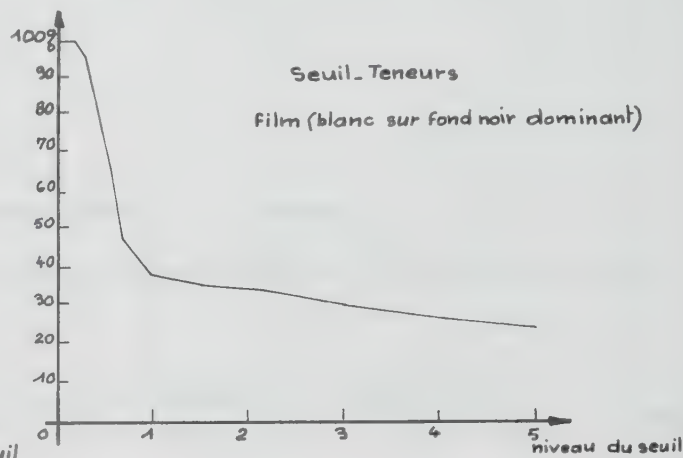


Fig. 6

II - PANORAMA DES TECHNIQUES DE PREPARATION D'ECHANTILLONS

1 - Méthodes indirectes

On peut a priori envisager de travailler soit sur l'échantillon lui-même, soit sur une "image" de celui-ci. Citons pour mémoire ces méthodes indirectes. Nous n'en reparlerons plus dans la suite. Elles ont l'inconvénient de nécessiter de toutes façons la confection d'une section polie qu'il vaut mieux chercher à exploiter directement.

- Autoradiographie

Le procédé consiste à imprégner la roche d'une résine radioactive qui impressionne ensuite une plaque photo.

- Matrice en relief

On imprègne l'échantillon d'une résine époxy (par exemple "l'Epikote"). On taille une section polie. Sa surface est attaquée à l'acide fluorhydrique qui ronge les grains de sable mais laisse intact le ciment carbonaté et l'Epikote. La matrice apparaît donc en relief et on peut en imprimer la marque directement à l'encre noire sur un film transparent.

- Réplique en cellulose

Sur une face polie de la roche on étale un vernis. Après séchage on le décolle. La pellicule obtenue est une réplique du relief. On peut la coller sur une plaque de verre et l'examiner en lumière transmise ou réfléchie. Cette méthode est utilisée par les métallographes ou les paléobotanistes pour l'étude des états de surface.

- P.P.S. (Porosité Péetrographique de Surface)

Cette méthode imaginée par C. HOUAREAU (S.N.P.A.) est d'un emploi limité aux roches carbonatées non pulvérisantes. Elle consiste à enduire la surface préalablement polie d'un échantillon avec du plâtre de Paris. Après séchage l'échantillon est nettoyé avec une peau de chamois. On applique un rhodoïd qui est alors marqué de blanc à l'endroit des pores. Le rhodoïd est photographié et les parties non impressionnées de la photo représentent les pores.

A l'A.T. les diagrammes P.P.S. donnent de très bons résultats mais ne permettent théoriquement de voir que les pores supérieurs à la dizaine de microns, et en réalité, dans des conditions raisonnables de rapidité d'exploitation, que les pores supérieurs au demi-millimètre. Cela suffit cependant pour l'étude des macropores d'une carotte.

- Film

On peut réaliser une image photographique d'une lame mince en utilisant la propriété d'anisotropie optique des grains de quartz. On maintient la lame mince (imprégnée de résine ou non) entre deux polaroïds croisés qu'on fait tourner solidairement à vitesse constante. De cette façon les grains s'éclairent tour à tour et impressionnent la plaque photo. Le négatif montre les grains en noir, et la matrice qui ne transmet pas de lumière reste transparente.

Le résultat de ce procédé est une image très contrastée d'un côté les grains de quartz, la silice, la calcite ou la dolomie et de l'autre les pores et les matériaux amorphes. Mais il est un peu lourd. Et du point de vue quantitatif on ne "récupère" pas tout : certains grains restent éteints ou gardent une teinte gris sombre tout au long de la rotation des polaroïds.

Néanmoins l'idée d'utiliser la lumière polarisée est intéressante pour la visualisation des grains dans une roche très compactée (quartzites) où les joints de grains ne sont pas apparents. Dans l'avenir on pourrait placer la lame mince entre deux nicols croisés solidaires et enregistrer l'image sur magnétoscope à chacune de leurs positions. Des opérations logiques appropriées permettraient de mesurer la granulométrie des grains comptés individuellement. On remarque que la platine restant fixe les mesures pourraient être linéaires et traduire l'anisotropie du milieu.

- Cathodoluminescence

C'est un autre procédé d'avenir, plein de promesses, pour la visualisation des grains. La cathodoluminescence, émission de lumière pendant un bombardement d'électrons, a été introduite en pétrographie par J.V. SMITH et R.C. STENSTROM en 1965. Récemment R.F. SIPPEL (Mobil Oil) a réussi à faire ressortir très distinctement le sédiment clastique de son ciment. Cette méthode ouvre la voie à l'analyse des grains primaires ou du moins de ce qu'il en reste après la diagénèse.

2 - Méthodes directes

On peut distinguer deux groupes : les techniques où l'échantillon est préparé sans consolidation préalable de la roche et l'inverse.

a) Roche non consolidée

- section polie

Nous avons examiné des sections polies de grès à ciment siliceux. En lumière réfléchie les pores sont parfaitement absorbants et apparaissent en noir. Le contraste est excellent comme le témoigne la courbe seuils-teneurs de la figure 7.

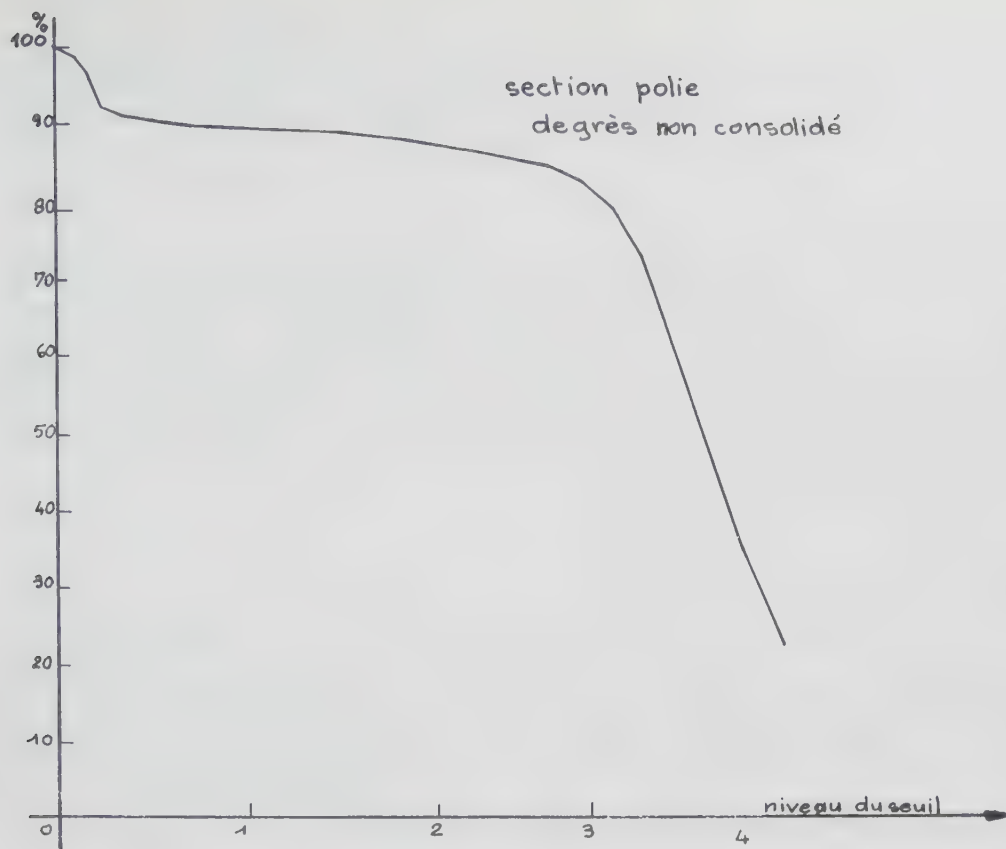


Fig. 7

Cependant plusieurs questions se posent à la fois du point de vue théorique et pratique.

Pour la théorie deux remarques :

- La confection d'une surface polie sur échantillon brut met en évidence toute la porosité, qu'elle soit interconnectée ou non.
- Dans le cas de grès ordinaires contenant du ciment et toutes sortes d'impuretés argileuses ou métalliques on peut craindre que la présence de minéraux opaques (tels que la magnétite ou la limonite) introduise en réflexion des noirs qui seraient alors confondus avec la porosité.

En ce qui concerne la commodité expérimentale il faut remarquer que la confection d'une belle section polie est déjà en soi une opération délicate, et plus encore pour un matériau non consolidé. De fait il n'est pas classique de laisser la porosité ouverte. On risque 4 ennuis principaux :

- pollution des plateaux de polissage par les grains de quartz
- intrusion dans les pores de grains d'abrasif qui pourront ultérieurement rayer la préparation
- libération des constituants hydrophiles : les ciments de type colloïdal ou phylliteux.

- pénétration le cas échéant de la résine d'enrobage (pour que l'échantillon ait la taille voulue il faut souvent l'enrober dans du stratyl).

- section polie traitée

Il est possible d'améliorer le contraste en tirant profit du fait que les pores sont creux. Si l'on étale un produit quelconque il pénétrera dans les pores et ceux-ci ressortiront lorsqu'on aura essuyé la surface de la préparation. La méthode a été employée sur des clinkers de ciment avec du noir de fumée.

b) Matériaux consolidés

La consolidation des échantillons simplifie la fabrication de préparations : fixation des grains, saturation des pores, stabilisation des constituants hydrophiles, suppression des problèmes d'enrobage. Elle permet aussi directement une meilleure visualisation du réseau poreux, surtout par la technique de fluorescence.

- Les résines - lumière visible

- Résine colorée

La méthode la plus classique, celle de J. ETIENNE et J. LE FOURNIEF consiste à injecter ou à faire pénétrer par simple capillarité une araldite colorée en orangé ou en bleu. Si on l'utilise à l'A.T. comme pour l'observation pétrographique, c'est-à-dire en confectionnant des lames minces éclairées en lumière blanche transmise, cette technique donne des résultats désastreux. A la télévision la résine se confond avec l'argile et même les plages sombres de certains grains. Les courbes seuils-teneurs de la figure 8 permet un réglage du seuil absolument arbitraire ; celle de la figure 9 présente un semblant de palier mais l'incertitude reste grande.

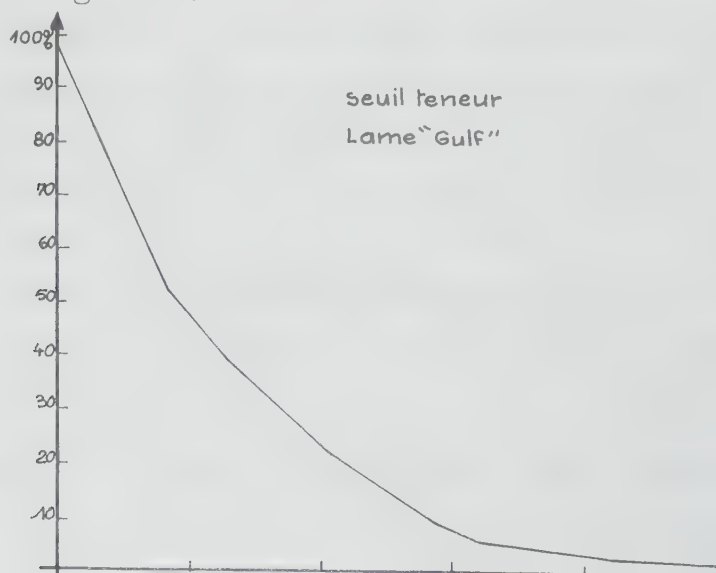
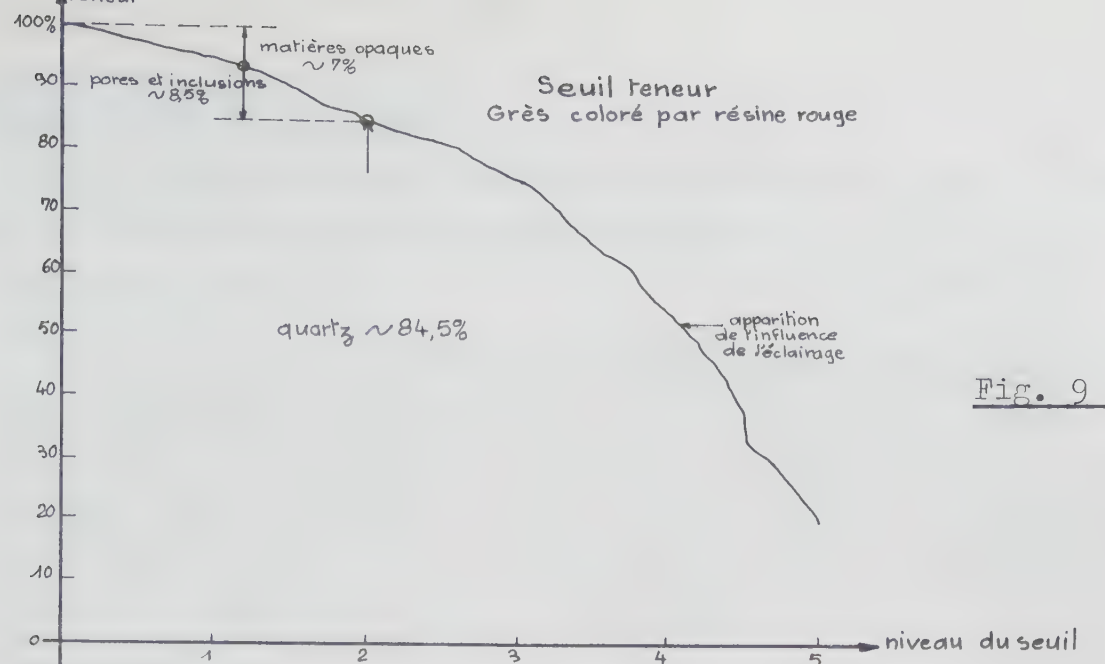


Fig. 8



Avec une résine bleue le contraste est un peu meilleur à l'oeil, mais pas significativement pour la caméra télévision.

Il est possible de mettre en valeur tel ou tel constituant en éclairant la préparation en lumière monochromatique. On dispose pour cela d'une lame interférentielle qui permet de sélectionner une longueur d'onde de manière quasi-continue.

- Méthacrylate de Méthyle

La technique d'injection de méthacrylate, résine plus connue sous le nom de "plexiglas", est utilisée par les laboratoires du B.R.G.M. Ses caractéristiques de viscosité et de tension superficielle permettent une bonne saturation de l'espace poreux. Le méthacrylate possède un pouvoir réflecteur très bas, légèrement plus faible que celui du quartz (de l'ordre de 5 %). Sur une section polie éclairée en lumière incidente il apparaît donc plus sombre que le quartz. On augmente le contraste en dissolvant le méthacrylate avec du chloroforme par exemple. Le résultat est le même que lorsque la roche est préparée sans consolidation ... avec la même confusion entre la porosité et les impuretés des grains.

- Résines opaques

Le noir des pores ouverts visualisés en lumière réfléchie pourrait être obtenu en lumière transmise en injectant une résine opaque. C'est une voie qui semble pourtant bouchée. En effet si l'on colore la résine au moyen de pigments dispersés il va falloir la "charger". Mais alors la saturation sera mauvaise. Les pigments vont s'agglomérer et boucher les fins canaux, les constituants

colloïdaux pomperont la résine et laisseront le colorant dehors ; la densité de pigment décroîtra de haut en bas de l'échantillon : il y aura effet chromatographique. Pour réaliser une bonne saturation il faut un colorant soluble. Mais on n'opacifie pas avec un produit soluble.

- Résine et poudre de zinc

L'idée était d'augmenter le pouvoir réflecteur des pores alors que les méthodes vues jusqu'ici le diminuent. Or des matériaux à pouvoir réflecteur élevé sont les métaux. Deux essais d'injection d'une araldite chargée de poudre de Zn se sont révélés catastrophiques. Le zinc s'amalgame et se dépose n'importe où.

- Résines fluorescentes

C'est la technique utilisée, ce qui lui vaut l'honneur d'un paragraphe.

II - VISUALISATION DU RESEAU POREUX EN FLUORESCENCE

1 - Critères

L'imprégnation par une résine fluorescente est une méthode radicale de mise en évidence du réseau poreux : l'excitation de la préparation par une lumière UV assure de voir uniquement les zones qui réémettent dans le visible, c'est-à-dire les pores emplis de résine fluorescente. (La fluorescence naturelle de minéraux comme la calcite est très faible)

L'idée de cette technique proprement dite n'est pas nouvelle puisqu'elle figurait déjà en 1963 dans une publication de J. ETIENNE [45]. La roche était saturée avec une araldite colorée à la rhodamine ; une lame mince était taillée et observée en lumière transmise naturelle ou ultra-violette. Mais utilisé tel quel ce procédé se montre inefficace pour une caméra de télévision, faute d'une intensité lumineuse suffisante.

De façon générale les essais indiquent qu'une technique de fluorescence doit posséder les 3 qualités suivantes :

- Forte intensité de fluorescence

Bien que parfaitement visible à l'oeil une image peut ne pas "passer" à la télévision. Le gain de la caméra ne doit pas être trop poussé car cela augmente le bruit de fond. Il est nécessaire d'obtenir au départ une image suffisamment lumineuse.

- Sélectivité de la coloration

Il faut que les zones fluorescentes correspondent bien à l'espace poreux utile. On se heurte à 2 difficultés :

. présence d'argile

dans certains cas l'argile absorbe la résine même par simple capillarité et fluoresce. Certes l'argile possède une véritable porosité susceptible de participer de façon notable aux réserves d'huile sinon de manière certaine à sa production. (Ex. kaolinite du Sahara). Mais il est souhaitable de pouvoir distinguer la porosité propre de la porosité argileuse.

. Effet de halo

Aux frontières des pores emplis de résine fluorescente on observe un halo, une lumière floue qui semble éclairer les grains eux-mêmes. Parfois des grains semblent fluorescer dans la masse. Cet effet de halo, qui fait "déborder" les pores amène à surestimer l'espace poreux.

- Stabilité à la lumière

Certains produits fluorescents se dégradent très rapidement sous l'influence de la lumière. Ils sont à éviter si l'on désire pouvoir refaire l'analyse de l'échantillon le cas échéant.

2 - Imprégnation de la roche par une résine

La mise au point d'une technique d'imprégnation des roches par une résine est une longue suite de tâtonnements pour trouver des produits aux qualités voulues, compatibles entre eux et déterminer les multiples conditions expérimentales de leur mise en oeuvre, les "points de fonctionnement" en quelque sorte. Autant utiliser au maximum les techniques ayant déjà fait leurs preuves, quitte à les modifier.

Dans le but d'augmenter l'intensité lumineuse on a d'abord tenté de remplacer la rhodamine B par d'autres fluochromes (ex : auramine, acriline orange). Des essais ont même porté sur des azureurs optiques (des Tinopals), produits utilisés surtout dans la teinture des fibres artificielles et qui possèdent la propriété de transformer la lumière UV en lumière visible bleue ou violette suivant le même principe que l'émission fluorescente. Les résultats se sont révélés excellents du point de vu luminosité mais trop peu sélectifs : l'argile fluoresce

autant que les pores. En outre il faut adjoindre un colorant si l'on tient également à pouvoir visualiser les pores en lumière naturelle.

La rhodamine B à l'avantage d'être déjà colorée et de présenter dans les argiles une fluorescence plus mate. Peut-on en accroître l'intensité en augmentant sa concentration qui d'ordinaire est de 0,5 % du poids de l'araldite ? Apparemment non : à 3 % la fluorescence n'est pas plus vive qu'à 0,5 %.

La théorie (cf p. ex [44] enseigne qu'il existe un optimum de concentration. Le modèle de Francis PERRIN par exemple montre que l'intensité lumineuse émise par une couche très mince de corps luminescent, de sorte que l'on puisse négliger les absorptions, est de la forme : $I : A c e^{-kc}$ où c est la concentration, et A et k des constantes. Cette fonction présente bien un seul maximum pour $C = 1/k$.

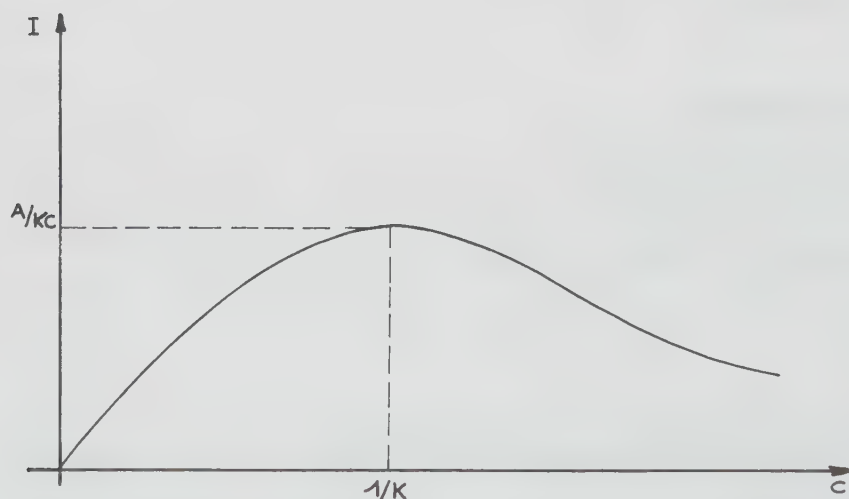


Fig. 10

Loi de Perrin : Influence de la concentration sur l'intensité

Il semble donc que les concentrations de rhodamine supérieures à 0,5 % se situent sur la partie décroissante de la courbe. L'optimum est-il à 0,5 % ? On ne sait pas. Mais s'il était à une valeur moindre il se peut qu'alors la coloration en lumière naturelle ne soit plus suffisante.

En définitive c'est du côté de la confection et de la visualisation des plaques minces qu'il faut rechercher une amélioration.

3 - Confection des plaques minces

La théorie et des essais comparatifs montrent que le meilleur procédé consiste à préparer une lame mince non couverte et de l'examiner en lumière incidente. Il est inutile de polir.

a) Lumière transmise ou incidente ?

Voyons la question sous ses deux aspects : intensité de la fluorescence et sélectivité.

. Intensité

L'absorption par l'échantillon lui-même peut être considérée comme négligeable vu la faible épaisseur mise en cause. Dès lors la seule différence provient de l'absorption par le verre. En éclairage par transmission la lumière excitatrice doit traverser la lame porte-objet, d'épaisseur non négligeable (1,8 mm environ) quand on sait que le verre est très absorbant pour le rayonnement UV. C'est donc un rayonnement affaibli qui excite la fluorescence.

Au contraire en lumière incidente il y a excitation directe.

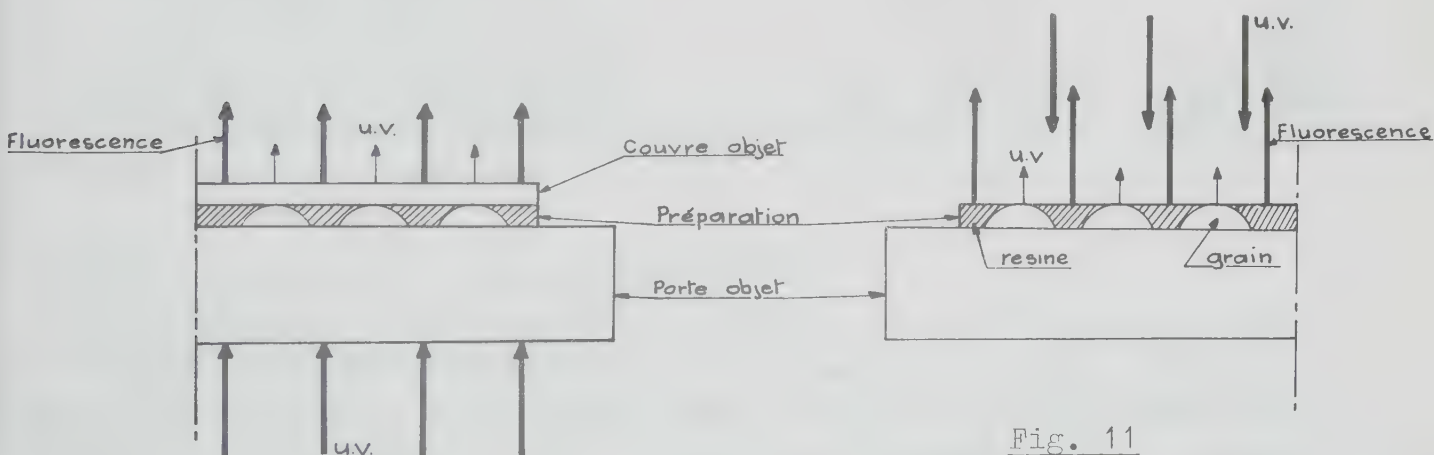


Fig. 11

. Sélectivité

- Lumière transmise

Effet d'épaisseur : Il est bien connu que la lame mince éclairée en transmission ne permet pas une observation réellement plane mais "intégrée" sur toute l'épaisseur de la lame. Ordinairement ceci conduit à surestimer les structures sombres et à sous-estimer les autres. (fig.12).

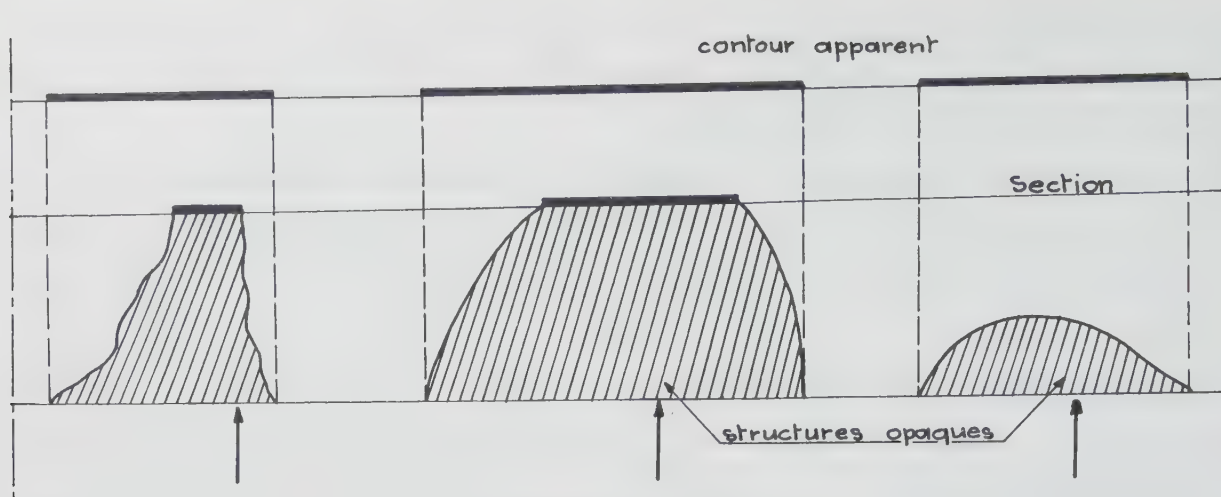


Fig. 12

Ici le risque est au contraire de surestimer les structures claires, c'est-à-dire la porosité. On peut imaginer les cas de figure suivants :

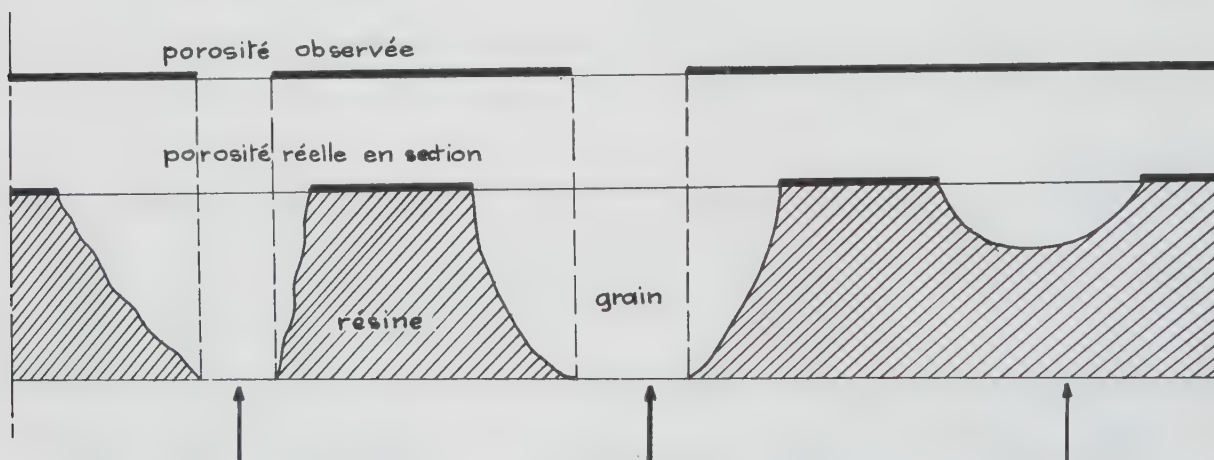


Fig. 13

Effet de halo : Pour les minéraux transparents chaque grain agit en quelque sorte comme une source lumineuse secondaire et diffuse la lumière. Les frontières du grain émettent une lumière différente de celle qu'on observe au milieu d'un pore. Variations de l'épaisseur de résine près des grains, réfractions multiples expliquent ce phénomène. Parfois même un grain semble fluorescer dans la masse : c'est le 3^e cas de la fig.13 où il y a de la résine sous le grain.

L'effet de halo peut être limité en diminuant l'intensité de la fluorescence, mais le remède serait pire que le mal.

- Lumière incidente

En principe ce mode d'éclairage évite au mieux les inconvénients précités. L'observation est plane car seule la surface de la lame est directement excitée ; et la diffusion est réduite. Il importe cependant d'utiliser des lames suffisamment minces. En effet le quartz est très perméable à la lumière, surtout violette, si la préparation est épaisse ce rayonnement rencontre presque certainement de la résine sous les grains, donnant lieu à une fluorescence parasite très gênante. Ainsi des sections polies taillées dans un grès de Fontainebleau ont présenté une intense fluorescence dans la masse. Au contraire si la lame est mince il devient très improbable de trouver de la résine sous-jacente au grain.

Cependant pour conserver une intensité lumineuse suffisante l'épaisseur ne doit pas être trop faible. Pratiquement l'usure jusqu'au "gris-fer" pour le quartz (de l'ordre de 20-25 μ) donne de bons résultats.

b) Faut-il polir les lames ?

Usuellement l'observation en lumière réfléchie est d'autant meilleure que la surface examinée est mieux polie. Les rayons tombent alors normalement à cette surface et sont réfléchis de la même manière. Dans le cas qui nous occupe il ne s'agit pas d'observer une lumière réfléchie mais une lumière émise par le fluochrome. Donc a priori le polissage n'apporte pas d'amélioration; ceci a été confirmé par des essais.

4 - Visualisation des plaques minces

a) Spectres de la rhodamine B en place

Pour choisir au mieux les matériels optiques il faut connaître les spectres d'excitation et d'émission de la rhodamine B dans les conditions de son utilisation c'est-à-dire dissoute dans l'araldite. Ces mesures ont été effectuées au Laboratoire de luminescence de la Faculté des Sciences de Paris (figures 14 et 15).

L'excitation présente un maximum à 5660 Å c'est-à-dire dans le jaune et l'émission à 5900 Å dans l'orangé.

FIG. 14

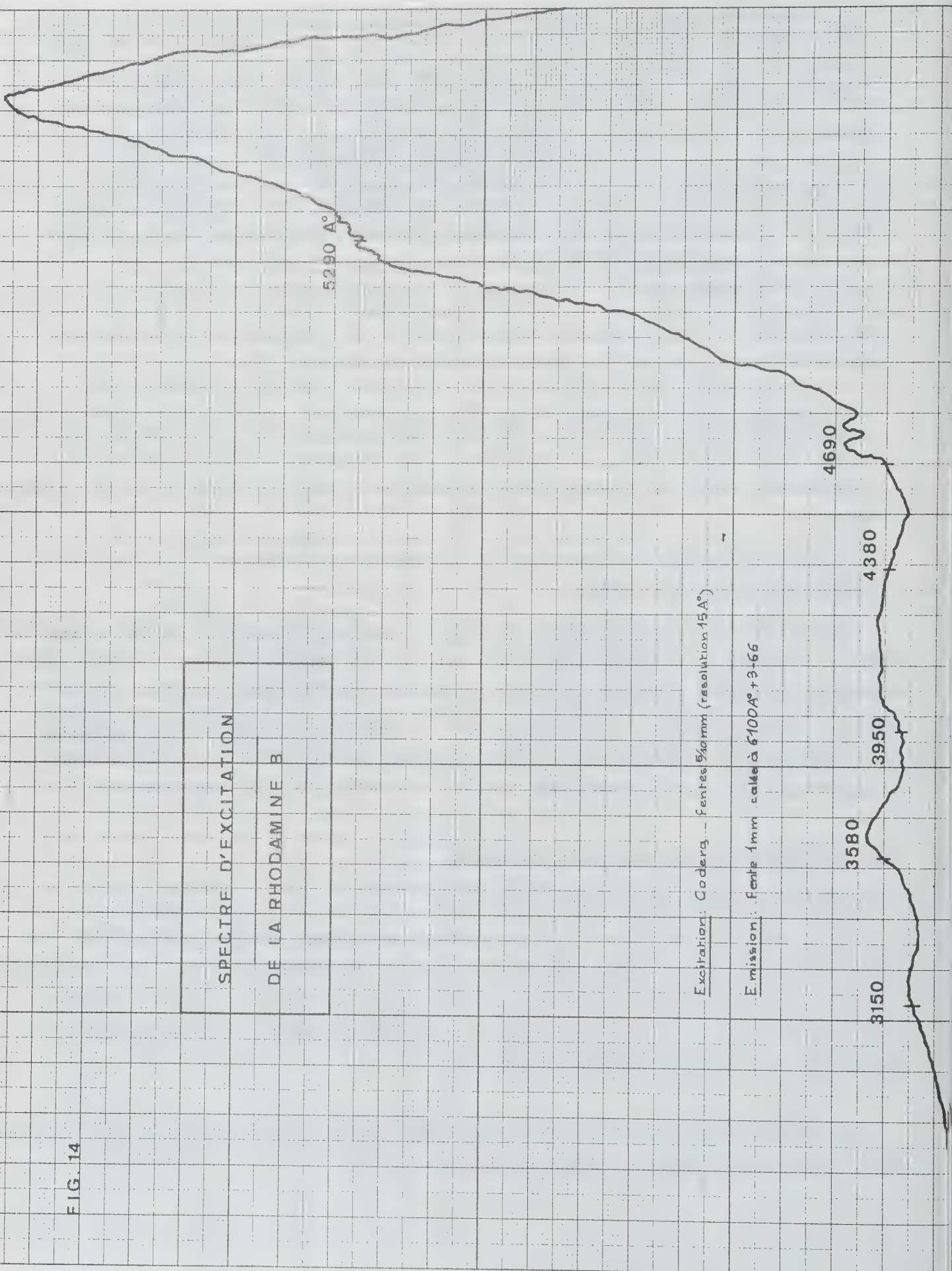
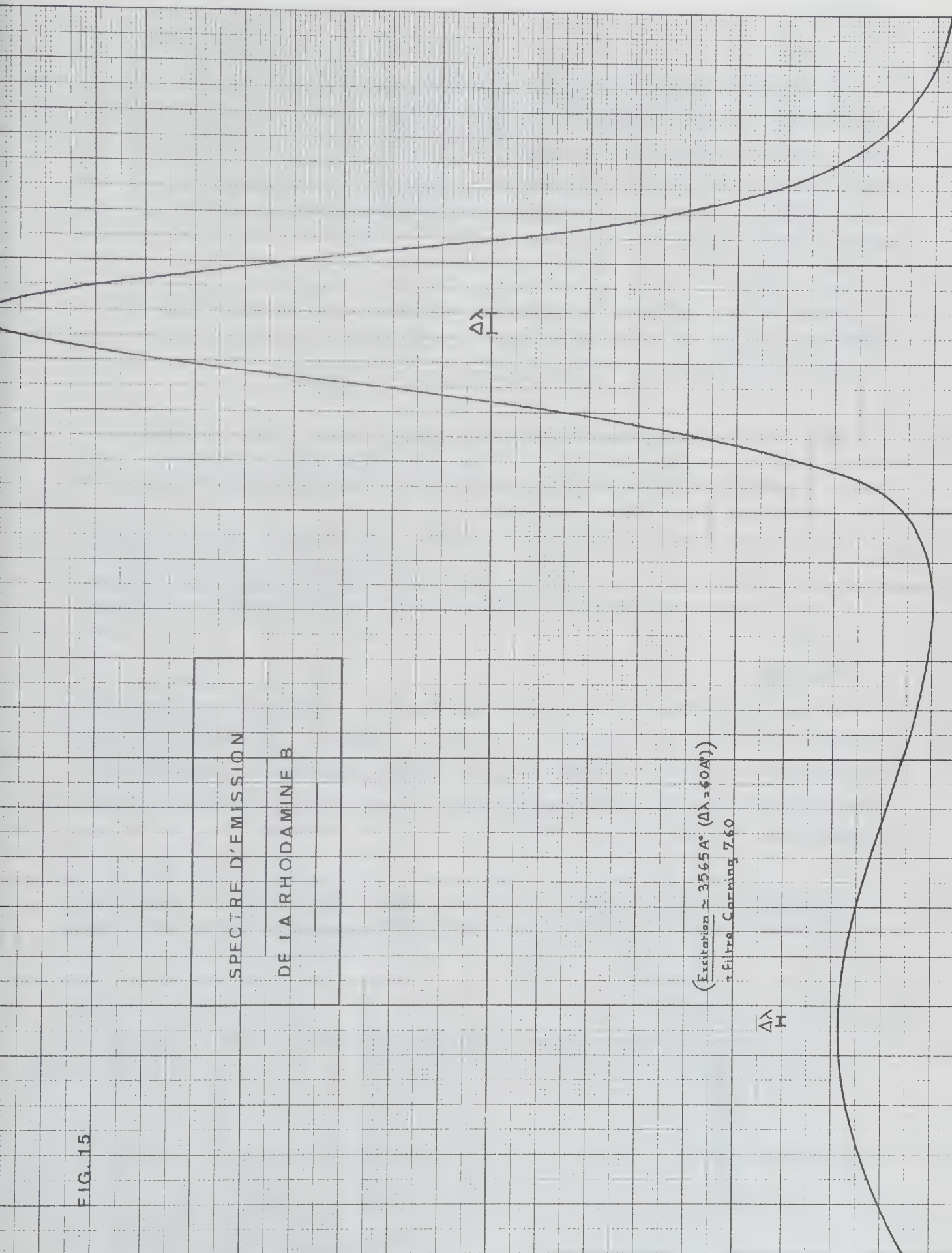


FIG. 15

SPECTRE D'EMISSION
DE LA RHODAMINE B

(Excitation $\approx 3565\text{\AA}$ ($\Delta\lambda = 60\text{\AA}$))
+ Filtre Corning 760



b) Matériels

- Lampe

La théorie montre que pour une excitation de fréquence donnée l'intensité de la fluorescence est proportionnelle à l'intensité d'excitation, du moins dans une certaine plage ; au delà il y a saturation. Mais l'excitation étant sélective il faut en principe employer une lumière excitatrice dont l'énergie spectrale soit maximale aux pics d'excitation du fluochrome.

Dans le cas présent le problème se pose différemment car si l'on veut travailler en fond noir pour ne visualiser que les pores il n'est pas question d'exciter la rhodamine dans le jaune.

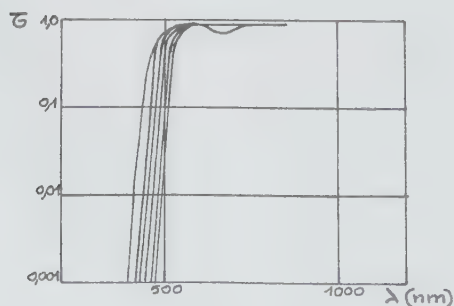
Sur le marché on trouve principalement deux types de lampe :

- la lampe à vapeur de mercure à haute pression présentant des raies et un spectre continu
- la lampe à Xénon à spectre continu. La lampe à Xénon est beaucoup plus stable que la lampe à vapeur de mercure mais beaucoup plus coûteuse aussi car elle nécessite un transformateur spécial.

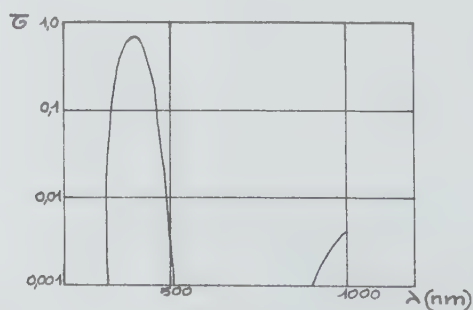
- Filtres

Le spectre d'émission montre que dans le visible l'énergie de la fluorescence devient notable à partir de 5600 Å°. Il convient donc d'utiliser un filtre d'arrêt dont la bande passante contienne les longueurs d'ondes supérieures à cette valeur et un filtre d'excitation disjoint du filtre d'arrêt.

Les filtres d'excitation BG 12 1,5 mm et BG 12 3 mm couplé avec les filtres d'arrêt K 490, K 510 ou K 530 donnent de bons résultats.



Filtres d'arrêt de gauche à droite: K430, K460, K470, K490, K510, K530



Filtre BG 12 de 3 mm pour excitation par le bleu

T : Facteur de transmission

- Illuminateur

La firme LEITZ vient de mettre sur le marché un illuminateur de fluorescence : l'"Opak de PLOEM". Son principe est le suivant : (cf. fig. 18).

La lumière émise par la lampe filtrée à l'aide de filtres d'excitation, rencontre un miroir dichroïque disposé à 45°. Celui-ci réfléchit sélectivement environ 90 % de la lumière d'excitation - longueur d'onde inférieure à une certaine valeur - et l'envoie sur la préparation par l'intermédiaire d'un objectif qui à ce niveau fait office de condenseur. Le rayonnement excitateur est en partie absorbé par le fluochrome qui émet corrélativement une lumière dite fluorescente et en partie réfléchi par les zones non fluorescentes. L'objectif reçoit ainsi en retour une lumière composée de fluorescence et de rayonnement d'excitation. Le miroir dichroïque réfléchit alors à nouveau environ 90 % de la lumière excitatrice en direction de la source et transmet la fluorescence vers l'oculaire. Il joue ici le rôle de filtre d'arrêt. Derrière le miroir il ne reste plus que la fluorescence et le reliquat de lumière excitatrice qu'un filtre d'arrêt permet d'éliminer.

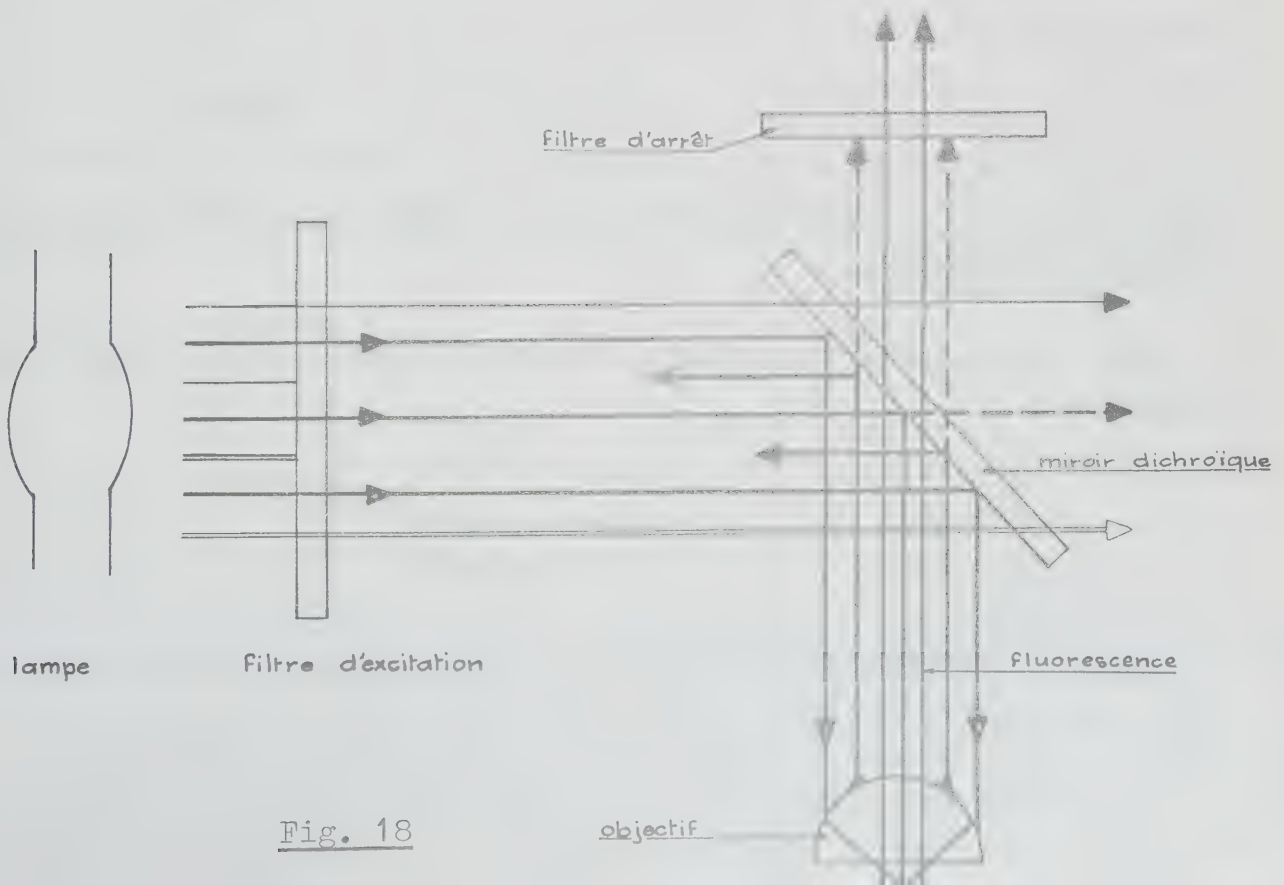


Fig. 18

L'illuminateur de PLOEM rend utilisables 90 % de la lumière d'excitation. Le dispositif comporte 4 miroirs montés sur révoluer donc aisément interchangeables. Ces miroirs réfléchissent l'UV, le violet, le bleu ou le vert (fig. 19). Dans le cas présent les miroirs K 455 ou K 495 conviennent le mieux.

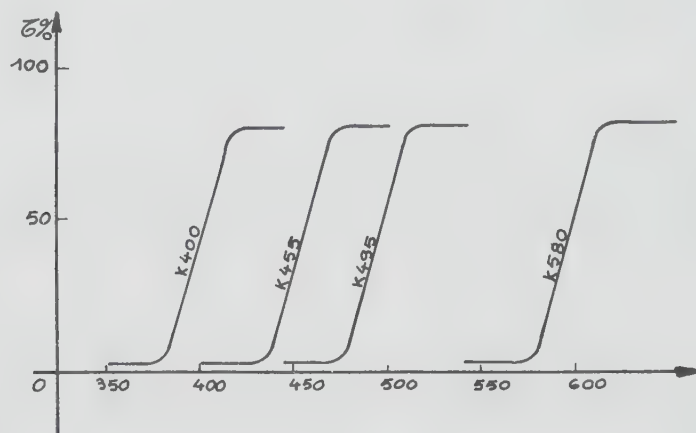


Fig. 19

- Objectifs

En lumière incidente l'objectif joue le rôle de condenseur. L'intensité lumineuse arrivant sur la préparation croît comme le carré de l'ouverture numérique de l'objectif. Au retour pour la fluorescence le flux recueilli par l'objectif varie également en raison du carré de l'ouverture numérique. Comme l'intensité de la fluorescence est proportionnelle à l'intensité incidente c'est finalement en raison de la puissance 4 de l'ouverture numérique que varie l'intensité de la fluorescence observable.

Pour les objectifs courants les ouvertures numériques sont les suivantes :

G = 10	O.N. = 0,25
G = 16	O.N. = 0,40
G = 25	O.N. = 0,50

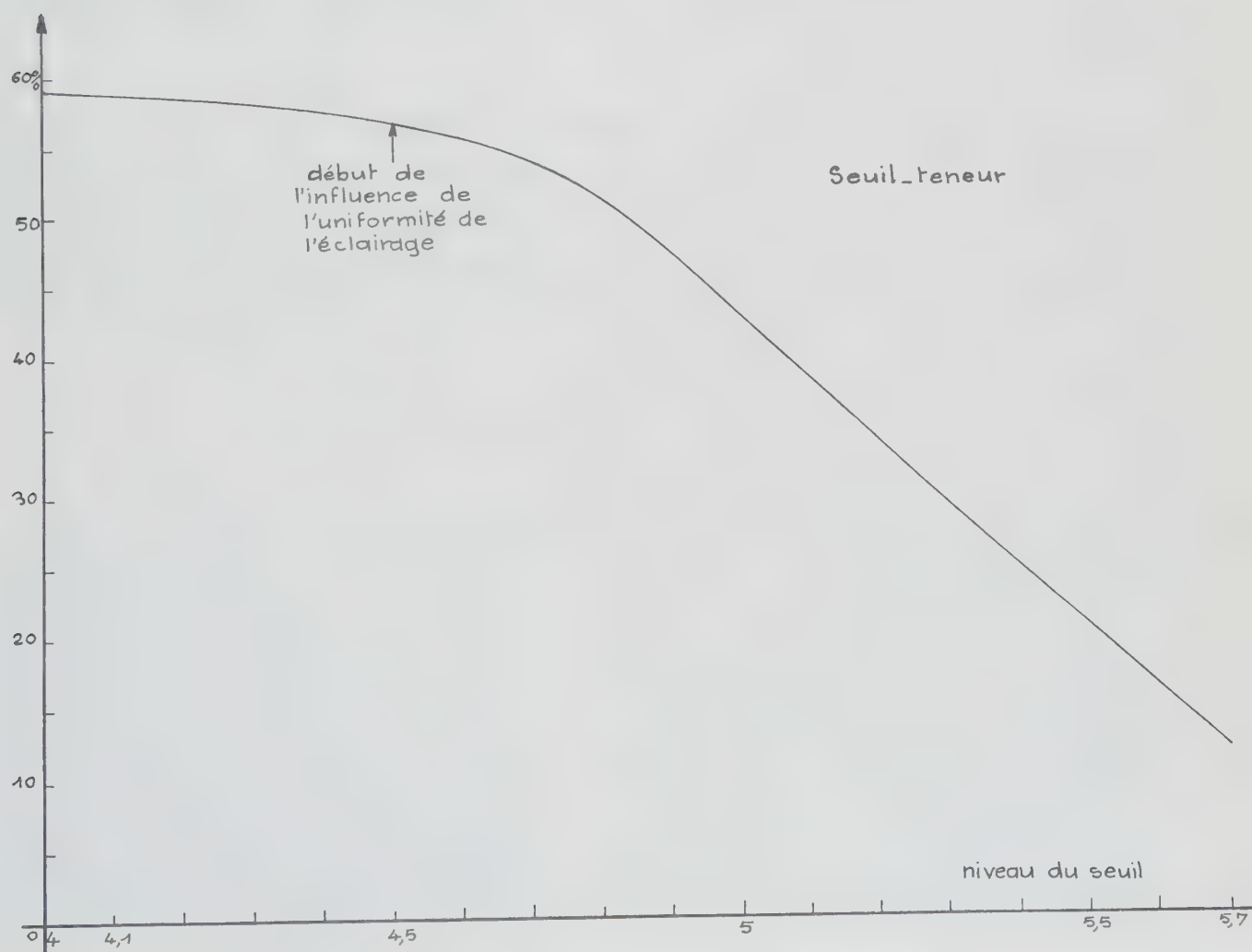
Ainsi en passant de G = 10 à G = 16 on multiplie l'intensité lumineuse par 6,56 et en passant de 10 à 25 par 16.

Toutefois il faut noter qu'augmenter l'ouverture numérique c'est diminuer la profondeur de champ. On n'a pas intérêt à trop le faire surtout en fluorescence où les plages situées en dehors de la zone nette émettent une lumière floue, diffuse qui rend très difficile voire impossible la délimitation précise de l'espace poreux.

- Oculaire

L'éclairement traversant l'oculaire varie en raison inverse du carré du grandissement. Ainsi pour un grandissement total désiré il y a intérêt, en ce qui concerne l'intensité lumineuse, à choisir un objectif à fort grandissement et un oculaire à faible grossissement les deux effets oeuvrent dans le même sens. Mais il faut tenir compte de la profondeur de champ. La démarche empirique est ici la meilleure.

5 - Résultats expérimentaux



La figure 20 représente la courbe seuils-teneurs d'un échantillon coloré par la méthode précédente. Le contraste est excellent et il n'y a aucune incertitude sur le réglage du seuil. On obtient un tel résultat

sur les roches non argileuses. Lorsque la roche renferme de l'argile l'expérience montre que celle-ci fluoresce de manière plus terne que les pores proprement dits si bien qu'il est possible de les distinguer sur l'A.T. Mais le manipulateur doit rester circonspect car le contraste est variable selon les échantillons et le grossissement du microscope.

Les photos 1, 2 et 3 planche I montrent à 3 grossissements différents une plage de grès du Sahara. Sur la photo 1 on distingue très nettement la résine infiltrée entre les cristaux de kaolinite ; on peut comparer avec le pore propre situé au-dessus. A cette échelle l'analyse englobe aussi bien les pores de l'argile que les autres. On constate sur les photos 2 et 3 prise à un grossissement moindre que la fluorescence de la kaolinite se "dilue" progressivement dans les zones sombres avoisinantes. Le seuil peut alors isoler la seule porosité non argileuse.

Certains échantillons argileux ne posent donc pas de problème, ainsi pour DELF 02, 04, 08, 11, 12, planches II et III. Au contraire sur DELF 03, 05 et 07, planches I et II, l'argile est suffisamment diffuse pour que son contraste avec les pores soit faible, parfois de l'ordre de grandeur des inhomogénéités de coloration au sein des pores eux-mêmes. Le réglage du seuil est alors très difficile et s'effectue en faisant coïncider au mieux l'image seuillée avec les zones supposées correspondre à de la porosité véritable. Encore faut-il pouvoir la distinguer à l'oeil ce qui de l'avis même du pétrographe n'est pas toujours possible même avec les méthodes classiques de visualisation.

P L A N C H E I

PLAGES SELECTIONNEES

Echelle:le trait représente 500 μ

OMP 11

G=115'

Grès de Messaoud
(kaolinique et quartzitique)

1

OMP 11

G=45''

Grès de Messaoud

2

OMP 11

G=18''

Grès de Messaoud

3

DELF 5

G=18

Grès argileux
(Diffus même en lumière
naturelle)

4

DELF 7

G=18

Grès quartzite argileux

DELF 7

G=45

Détail:inhomogénéité de la
coloration

PLANCHE I



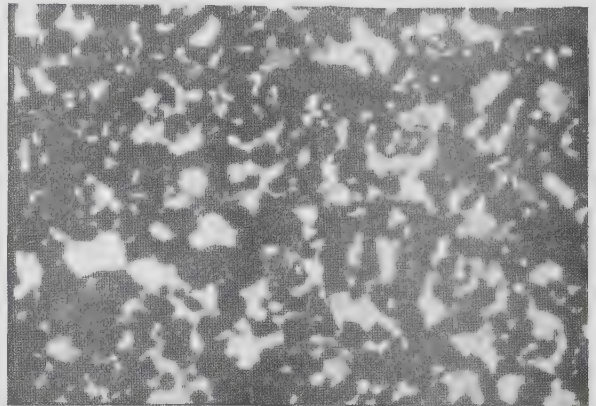
1



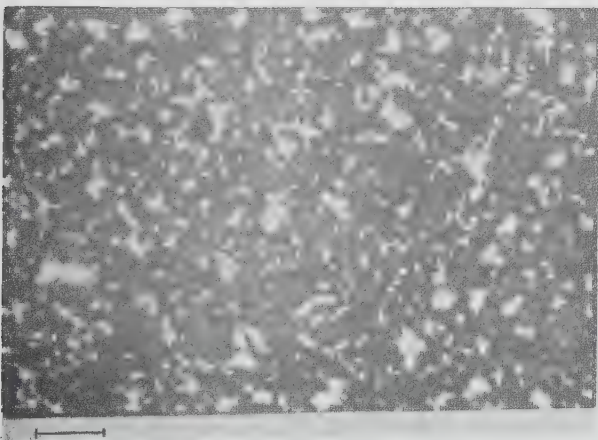
2



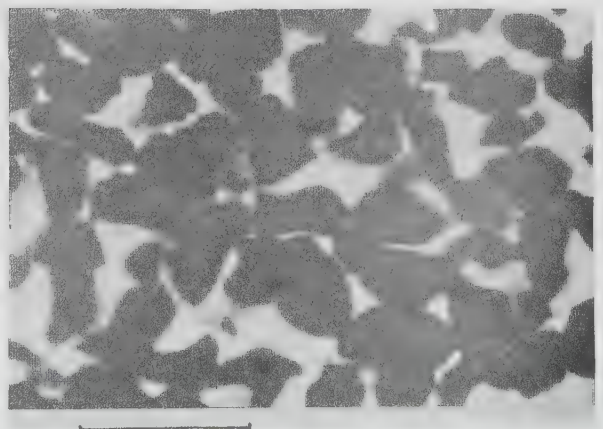
3



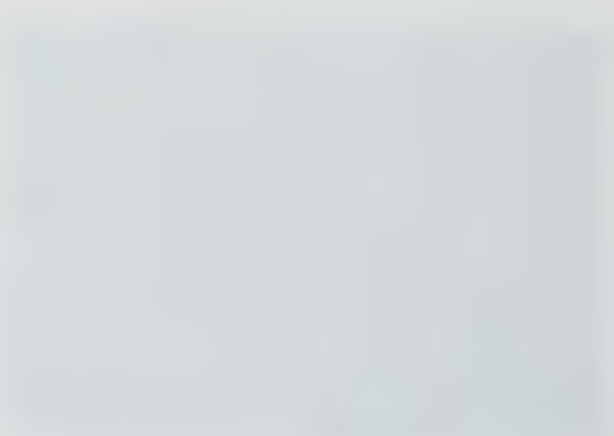
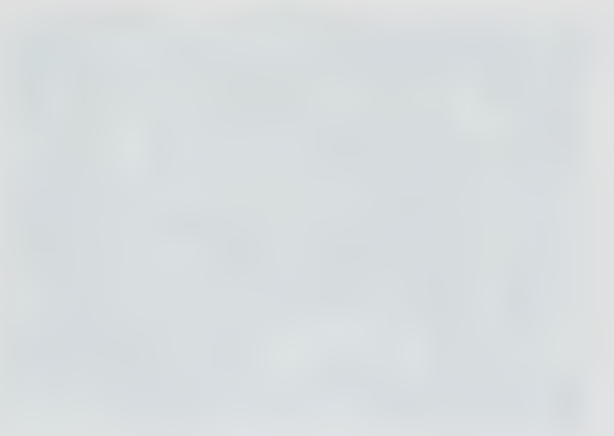
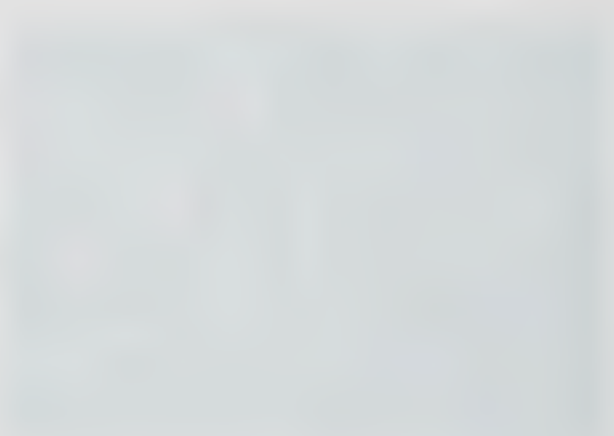
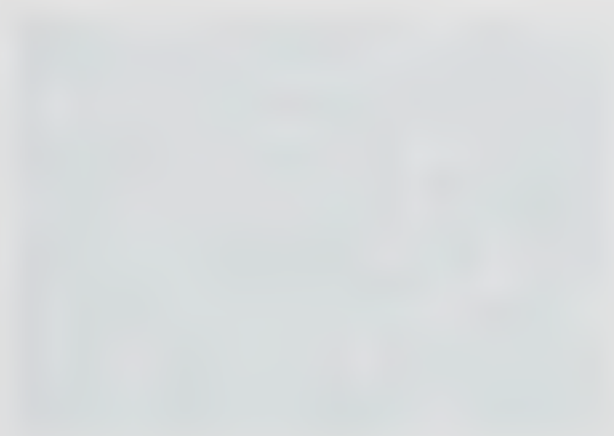
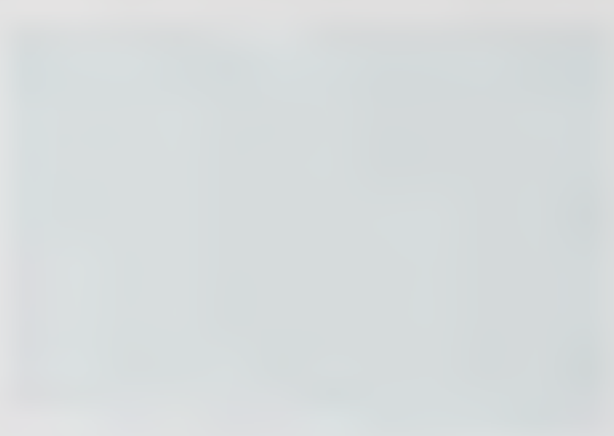
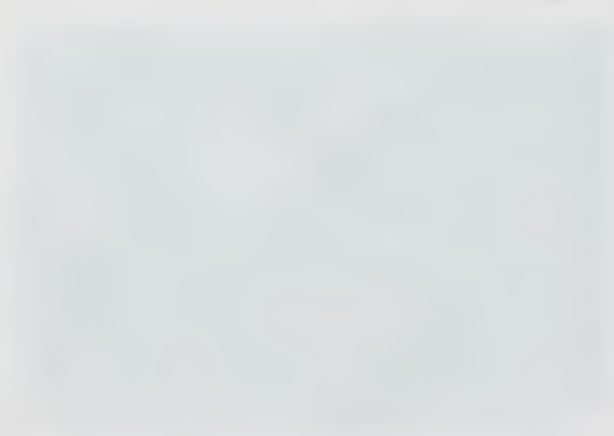
4



5



6



P L A N C H E II
PLAGES SELECTIONNEES

Echelle:le trait représente 500 μ

DELF 1

G=18

Grès de Fontainebleau

1

DELF 2

G=18

Grès des Vosges

2

DELF 3

G=18

Grès argileux

3

DELF 4

G=18

Grès quartzite argileux

4

DELF 8

G=18

Grès argileux

5

DELF 11

G=18

Grès quartzite argileux

6

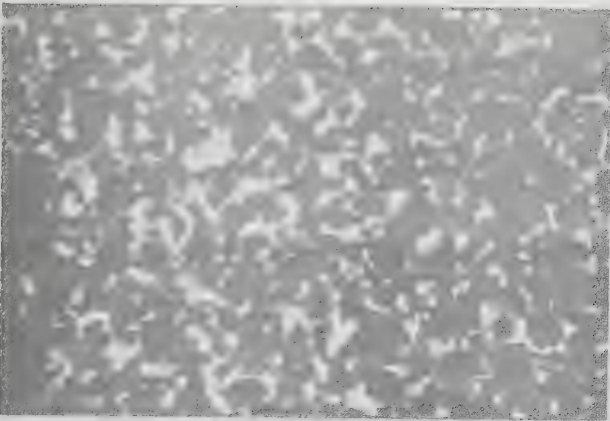
PLANCHE II



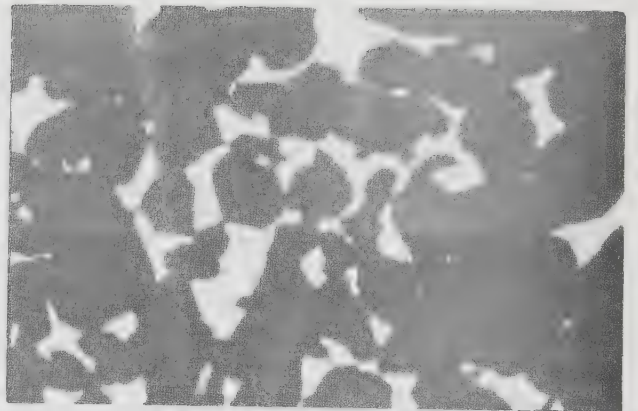
1



2



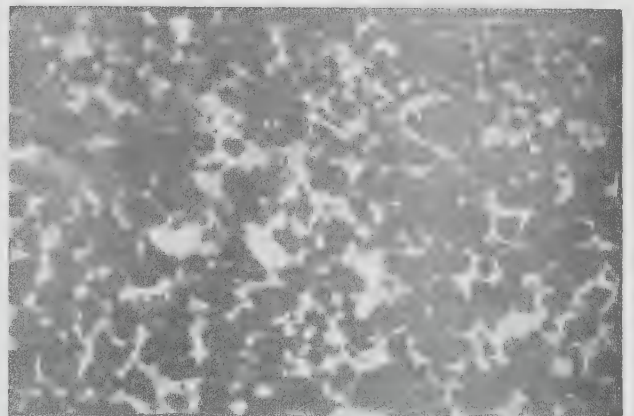
3



4



5



6



Echelle: le trait représente 500 μ

DELF 12

G=18

Grès kaolinique
et quartzitique

1

DELF 14

G=18

Carbonate grenu
dolomie sparitique

2

DELF 18

G=18

Calcaire bioclastique
et graveleux grossier

3

DELF 19

G=18

Calcaire grainstone
oolithique

4

DELF 12

G=29

Détail: fins canaux entre
les pores et bouchons
d'argile

5

DELF 19

G=45

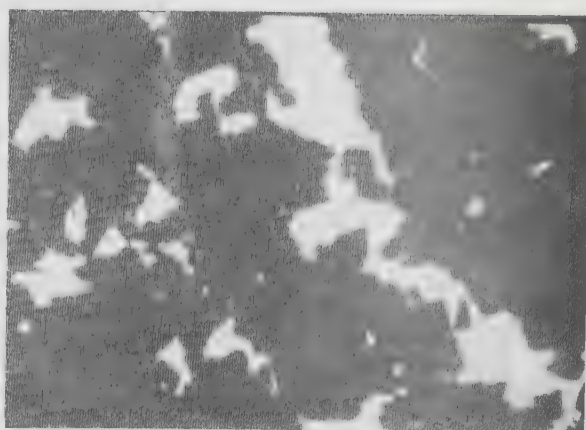
Détail: imprégnation superficielle
des oolithes par la résine

6

P L A N C H E III



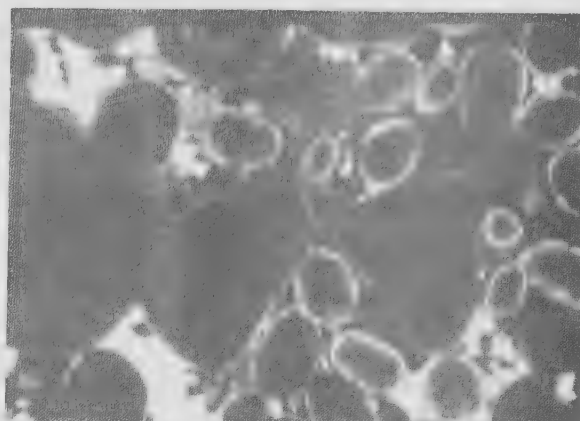
1



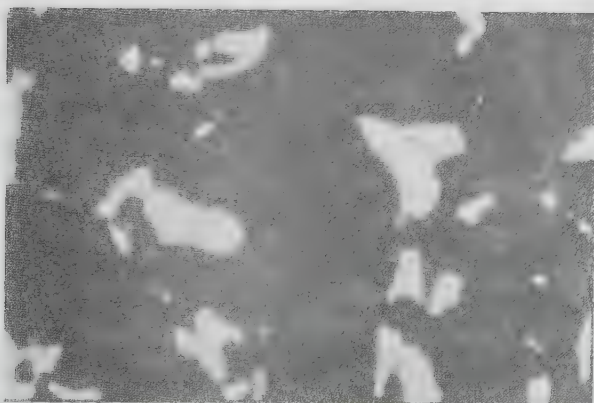
2



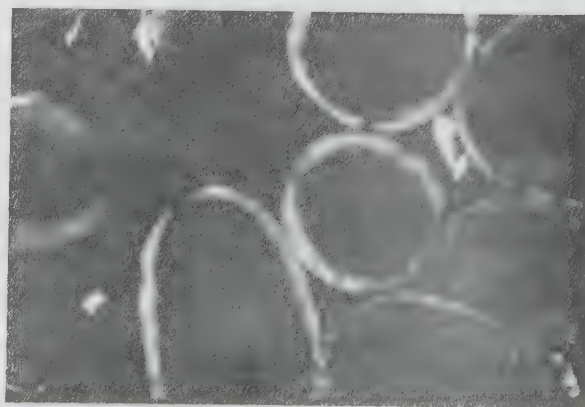
3



4



5



6



CHAPITRE V

COMPARABILITE DES MESURES DE POROSITE

Les résultats des mesures de porosité à l'A.T. sur une lame mince taillée dans un plug diffèrent parfois très fortement de la porosité du plug, estimée par une méthode pétro-physique. Certes la lame mince n'est qu'une fraction du plug et sa représentativité est sujette à fluctuations. Mais ceci n'explique pas que la porosité du plug soit toujours supérieure à celle de la lame mince, l'écart étant parfois négligeable, parfois du simple au triple. Une telle différence systématique a certainement une cause profonde. Il faut reprendre le problème à la base en précisant les liens entre les méthodes de mesure et l'objet mesuré.

I - PROBLEMES DE DEFINITIONS

1 - Le milieu poreux

Dans son acception courante le terme de milieu poreux répond à la définition de C. MARLE [37] : "un solide de forme compliquée, englobant des vides appelés "pores". Ceux-ci peuvent communiquer entre eux et contenir une ou plusieurs phases fluides, susceptibles de s'écouler. La partie solide du milieu poreux doit être connexe afin d'avoir une certaine cohésion : c'est en cela qu'un milieu poreux se distingue, par exemple, d'une suspension de particules solides dans un fluide."

Une définition plus mathématique et plus générale consiste comme le fait G. MATHERON [1] à considérer un milieu poreux comme "un milieu à deux composantes, remplissant l'espace entier, défini par la donnée d'un ensemble A et de son complémentaire A^c ". Par convention de langage on désigne A par l'expression "les grains" et A^c par l'expression "les pores" sans que cela implique d'hypothèse particulière sur la forme géométrique de A ou l'existence de "grains" individualisables. La convention de langage n'est pas fortuite car les milieux poreux réels, au sens de C. MARLE, sont évidemment susceptibles d'une telle formalisation. Le terme de "pores" y est dégagé de sa signification sous-jacente de cavité poreuse plus ou moins individua-

lisible, dans la mesure où l'on parle par exemple de "rayon d'entrée de pore", pour ne plus désigner que le complémentaire de la phase solide : grains, ciment, argile].

2 - L'espace poreux

Il fait l'objet de nombreuses sous-distinctions.

Ainsi les pétrographes distinguent-ils les vides primaires ou intergranulaires, contemporains de la formation du dépôt, des vides secondaires formés ultérieurement par dissolution, fracture ou recristallisation. D'autres classifications plus subtiles reconstituent la genèse de l'espace poreux.

Pour sa part l'ingénieur pétrolier ne s'intéresse pas à l'espace poreux total mais à la fraction accessible aux hydrocarbures et participant à leur écoulement : c'est l'espace poreux "utile". En première approximation on l'assimile à l'espace poreux interconnecté. Une étude plus fine montre que les pores et canaux de petites dimensions ne peuvent être occupés que par de l'eau qui y est fixée ; il convient donc de ne pas en tenir compte. Pour les sables argileux par exemple C. JACQUIN[33] définit la porosité utile f' par la relation :

$$f' = \text{porosité totale} \times \frac{\text{Volume(eau mobile)}}{\text{Volume(eau mobile+eau fixée)}}$$

la porosité totale tenant compte des pores intérieurs aux argiles. Dans l'optique de la production la fraction utile de l'espace poreux est celle qui était effectivement envahie par les hydrocarbures sans les conditions physiques régnant dans le réservoir. On peut la reconstituer approximativement en laboratoire en injectant un fluide dans la roche, sous réserve de respecter les similitudes dynamiques convenables.

Par ailleurs, on classe l'espace poreux en domaines de porosité correspondant à un découpage du "spectre de porosité" relativement aux limites d'investigation de diverses méthodes. Ainsi J. GONI, J.P. RAGOT et A. SIMA [30] distinguent-ils :

- La macroporosité : rayon d'entrée de pore supérieur à 7,5 microns (saturation d'un échantillon par le mercure, du vide à la pression atmosphérique).

- la microporosité : rayon d'entrée de pore compris entre $7,5 \mu$ et $300 \text{ \AA}$ (injection de mercure sous pression).
- L'infraporosité : rayon d'entrée de pore inférieur à $300 \text{ \AA}$ (adsorption gaz-solide - Méthode B.E.T.).

Dans sa théorie de la genèse de la loi de DARCY, G. MATHERON discerne trois échelles :

- l'échelle microscopique : celle des particules élémentaires de la mécanique statistique ; c'est le niveau ponctuel théorique dont tout point physiquement observable n'est qu'une approximation.
- l'échelle granulométrique : elle correspond à des éléments de volume grands à l'échelle macroscopique mais petits à l'échelle de la granulométrie ; Par exemple une plage de milieux poreux comportant quelques grains. C'est à ce niveau que s'applique l'équation de Navier.
- l'échelle macroscopique : les éléments de volume sont suffisamment grands vis-à-vis des dimensions granulométriques pour que le milieu poreux puisse être considéré comme homogène. C'est dans un tel milieu homogène que s'observe la loi de DARCY.

3 - La porosité

Le concept de porosité semble a priori ne soulever aucune difficulté : c'est le rapport du volume des vides au volume total de l'échantillon.

Mais on sait bien que la porosité n'est une grandeur descriptive d'un milieu que si elle ne dépend pas trop de la géométrie de l'échantillon où elle a été mesurée. Certains diagrammes P.P.S. par exemple présentent un îlot poreux au sein d'une masse compacte : on pourrait obtenir à peu près n'importe quelle porosité selon le choix du champ total.



D'autres difficultés évoquées par C. MARLE [37] d'après K.M. HUBBERT [31] se présentent lorsqu'on veut définir une porosité locale dans le but par exemple de décrire son évolution le long d'un puits. Supposons qu'on décide de prendre comme volume de référence une sphère de rayon r , centrée sur le point considéré x . La porosité locale $\varepsilon(x)$ peut présenter l'allure de la figure 2

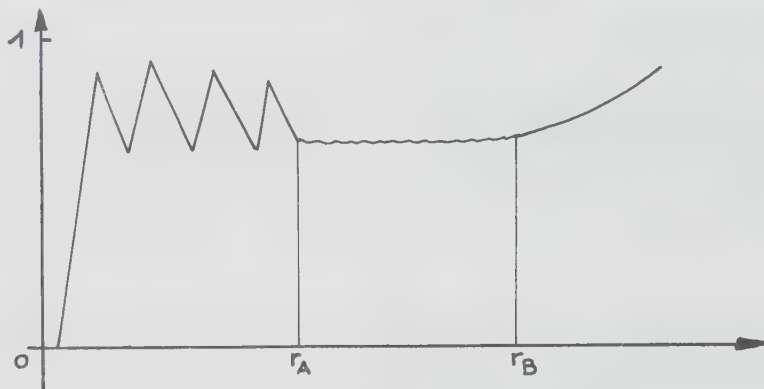


Fig. 2

En deçà de r_A la sphère est trop petite pour permettre à un effet de moyenne de jouer : les fluctuations sont importantes. A la limite, quand r tend vers 0, la porosité locale tend vers 0 ou 1 selon que le point x est situé dans un vide ou dans le solide. Au delà de r_B le volume de référence fait intervenir des zones trop lointaines pour être prises en compte par une porosité locale.

Pour certains milieux poreux il peut exister une plage $r_A < r < r_B$ où la porosité locale est relativement stable. C'est dans cet intervalle qu'il est commode de la définir.

Mais tous les milieux poreux n'ont pas ce comportement. Il peut ne pas y avoir de plages $r_A < r < r_B$ ou au contraire s'en trouver plusieurs. De plus on ignore comment varierait la porosité locale si au lieu de choisir une sphère on avait pris un parallélépipède ou un ellipsoïde. En somme on peut définir autant de porosités qu'il y a de volume de référence, alors que la réalité physique est unique : l'espace poreux.

4 - Synthèse à l'aide de la théorie des variables régionalisées

Le formalisme de la théorie des variables régionalisées [3] permet de clarifier les définitions de l'espace poreux et de la porosité.

La variable régionalisée considérée est $k(x)$, indicatrice des pores ($k(x) = 1$ si $x \in$ pores, 0 sinon). C'est une fonction définie dans un certain domaine de $\mathbb{R}^n$, le champ géométrique. Elle est biunivoquement associée à un domaine poreux : $\{k^{-1}(1)\}$, l'image inverse de 1 par l'application k . Modifier la définition des pores revient à changer de régionalisation ponctuelle. Mais au lieu de considérer la variable ponctuelle on peut aussi s'intéresser à une régionalisée à l'intérieur d'un domaine ou support géométrique. Le support d'une géométrique variable régionalisée non ponctuelle n'est autre que le support de la fonction régularisante (le plus petit ensemble fermé où elle prend des valeurs non nulles). La porosité locale est une telle régionalisée puisque $\varepsilon(x) = \frac{1}{v} \int_v k(x+u)du$ est la valeur moyenne de $k(x)$ dans le volume v centré en x . Cette nouvelle variable est elle-même distribuée dans l'espace d'une certaine façon ; elle a sa propre régionalisation. Le support v doit être défini de manière précise avec ses dimensions, sa forme, son orientation. Si l'on change de support on obtient une nouvelle régionalisation qui présente des analogies avec la première mais ne lui est pas identique. Ceci est l'exacte formalisation de ce que nous avons vu à propos des porosités locales.

Ces trois notions : champ géométrique, régionalisation ponctuelle et support géométrique peuvent servir de fil directeur à une mise en ordre des problèmes.

- Délimiter un milieu poreux c'est se donner le champ de la variable ponctuelle.
- Préciser l'espace poreux c'est définir la régionalisation ponctuelle.
- Choisir une échelle d'observation c'est donner un support géométrique aux opérations de prise en moyenne.

C'est en quelque sorte observer le phénomène à un certain niveau. Et il faut le souligner ceci n'a rien à voir avec le découpage du spectre de porosité où l'on modifie la régionalisation ponctuelle elle-même.

I - METHODES DE MESURE DE LA POROSITE

Chaque méthode de mesure de porosité introduit son propre support la lame mince, le plug ou le tronçon de carotte. Ceci ne porte pas à conséquence car on sait dans une certaine mesure passer d'un support à un autre. Plus fondamental est que chaque méthode explore un domaine poreux différent, c'est-à-dire une autre régionalisation ponctuelle. C'est de là que proviennent les différences parfois très importantes des porosités mesurées sur un même milieu par des méthodes diverses.

Elles sont nombreuses. Nous en considérons ici trois, les plus couramment utilisées : la méthode de saturation, la méthode d'injection de mercure et la mesure en plaque mince. Les deux premières méthodes font l'objet de spécifications dans une fiche technique de la revue de l'I.F.P. [40]. Pour que l'exposé soit complet nous les évoquons ici, mais sans entrer dans les détails.

1 - Saturation

La méthode consiste à saturer un échantillon préalablement lavé et séché, à l'aide d'un fluide qui peut être le même que le solvant de lavage (tétrachlorure de carbone par exemple). Le volume de la phase solide est calculé par différence entre le poids de l'échantillon sec dans l'air et son poids apparent lorsqu'il est saturé et en immersion dans le fluide saturant. Le volume total est évalué en plongeant l'échantillon dans un bain de mercure.

La saturation peut avoir lieu sous pression mais en routine on procède à une imprégnation de la roche par simple capillarité. Sous toutes réserves on peut estimer atteindre ainsi les pores de rayon d'entrée supérieur à 300 Å.

2 - Injection de mercure : méthode PURCELL

Le principe de la méthode est fondé sur la loi de JURIN qui relie l'ascension capillaire h dans un tube cylindrique au rayon r du tube :

$$p_c = \rho gh = \frac{2T \cos \theta}{r}$$

T est le coefficient de tension superficielle. Il dépend de la nature du fluide, de sa température et de l'atmosphère qui le surmonte. Pour le mercure à 20° C sous pression atmosphérique $T = 470 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-1}$

θ est l'angle de raccordement : il ne dépend que de la nature de la paroi solide et du liquide en contact. Sa valeur est très sensible à la propreté de la paroi. Avec le mercure cet angle est pour la plupart des solides compris entre 135° et 142° . C'est pourquoi on trouve généralement dans la littérature les trois relations suivantes :

$$p_c = \frac{7}{r}$$

$$(\theta = 137^\circ)$$

$$p_c = \frac{7,35}{r}$$

$$(\theta = 140^\circ)$$

$$p_c = \frac{7,5}{r}$$

$$(\theta = 141,5^\circ)$$

p_c est une pression absolue exprimée en kg/cm^2 ; r est en microns.

L'interprétation de la méthode PURCELL est la suivante : avec le mercure $\cos \theta$ est négatif : il y a dépression capillaire. Pour faire pénétrer le mercure dans le tube il est nécessaire de lui appliquer la pression p_c . Il en est de même pour faire pénétrer le mercure dans les pores d'une roche. A chaque pression d'injection on peut affecter le volume de pores envahis et tracer une courbe pression-saturation.

Heureusement malgré les apparences la validité de la méthode n'est pas inféodée à l'interprétation par des tubes capillaires. En effet la loi de JURIN n'est qu'une application du théorème de Laplace : la pression capillaire en un point M de l'interface est $p_c = T(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ ou R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure en M de deux courbes orthogonales quelconques portées par l'interface. (On démontre que la somme $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ne dépend que de M). Si l'on désigne par $\frac{1}{R}$ la courbure moyenne $\frac{1}{R} = \frac{1}{2}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ on a $p_c = \frac{2T}{R}$ (lorsque $R = \frac{r}{\cos \theta}$ on retrouve la loi de Jurin).

Une approximation raisonnable est d'admettre que tout se passe comme si l'interface mercure-air avait une courbure moyenne $\frac{1}{R^*}$. Le rayon auquel on relie une pression d'injection donnée n'est plus celui d'un cylindre capillaire mais simplement celui du ménisque de mercure.

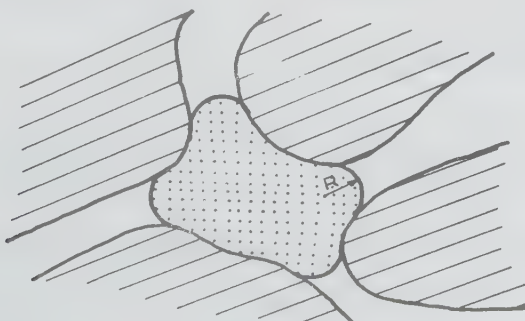


Fig. 3

*Dans le cas très particulier de fissures planes l'un des rayons de

Avec $T = 470 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}^{-1}$ on peut poser :

(V,1)

$$\boxed{\begin{array}{l} \rho \\ \text{(absolue)} \\ \text{kg/cm}^2 \end{array} = \frac{9,6}{R} \text{ en microns}}$$

Certains porosimètres à mercure (type CARLO-ERBA) peuvent atteindre des pressions de 1.000 kg/cm^2 . La fiche pétrophysique de l'I.F.P. indique une gamme de 0 à 251 bars absolus. Pour les mesures de l'étude présente on a poussé l'injection jusqu'à 150 kg/cm^2 ce qui d'après la relation (V,1) correspond à un rayon minimum du ménisque de 640 Å° .

3 - Plaque mince

La mesure de la porosité en plaque mince utilise comme support une section plane. On peut s'inquiéter de savoir s'il existe un rapport entre une porosité "superficielle" (calculée en tant que quotient de 2 surfaces) et une porosité "volumique". Le formalisme de la régularisation montre que oui.

Pour fixer les idées considérons un plug V de section S perpendiculairement à son axe. La porosité du plug est :

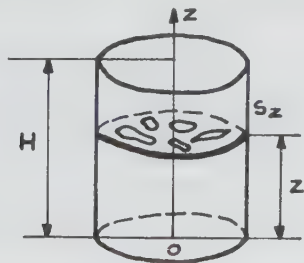


Fig. 4

$$\varepsilon(V) = \frac{1}{V} \int_V k(x) dx$$

intégrale qu'on peut décomposer en :

$$\frac{1}{H} \int_0^H dz \left[\frac{1}{S} \int_{S_z} k(x) dx \right] = \frac{1}{H} \int_{S_z} \varepsilon(S_z) dz$$

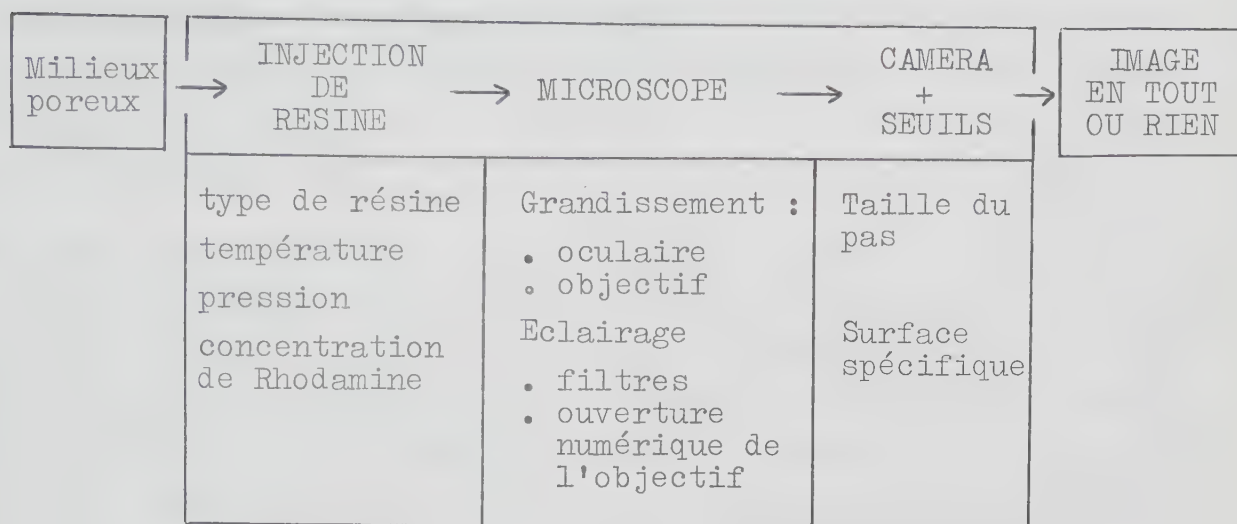
$\varepsilon(V)$ est la valeur moyenne des porosités superficielles. Quand on ne dispose que d'une section S_{z_0} par plug on pose généralement :

$$\varepsilon^*(V) = \varepsilon(S_{z_0})$$

estimateur
de $\varepsilon(V)$

Ce faisant on commet une erreur $\varepsilon(V) - \varepsilon^*(V)$, d'autant plus faible que le milieu est homogène le long de l'axe des z. On verra au chapitre VII comment la géostatistique permet de chiffrer cette erreur.

La régionalisation ponctuelle analysée résulte d'une succession d'opérations techniques. Le tableau ci-dessous indique quels sont les principaux facteurs dans l'analyse en plaque minces.



On peut admettre que la résine injectée à 150 kg/cm^2 pénètre les pores au moins aussi bien que le tétrachlorure de carbone, et de toutes façons bien au-delà de ce qui est observable au microscope optique.

Le pouvoir séparateur du microscope optique dépend des objectifs mais en tout état de cause sa limite inférieure est de $0,2 \mu$. Dans la mesure à l'A.T. on a vu que le diamètre minimum d'une structure vue et analysée est de 1 pas, soit dans les montages courants de 1 à 5μ .

Ainsi la mesure de porosité en plaques minces ne prend en charge que les pores de traversées supérieures au micron environ, alors que le solvant descend jusqu'à 300 Å . Il est tout à fait normal de trouver un écart systématique entre les deux séries de résultats.

III - COMPARAISON DES METHODES

Rappelons nous le problème posé au début : nous savons maintenant que la différence entre les mesures provient de la finesse de l'investigation, donc directement de la morphologie du réseau poreux.

Mais comment passer de la régionalisation ponctuelle du réseau poreux total à celle du réseau poreux visualisé sur le moniteur de contrôle? A cette question il importe de répondre afin de pouvoir définir l'objet d'étude de manière autonome et asseoir l'analyse du milieu

1 - Essais d'interprétation

On a vu précédemment que le pouvoir de résolution de l'A.T. est de 1 pas. En d'autres termes on exprime par là que les divers dispositifs de visualisation et d'analyse, microscope, caméra et seuils, ont pour effet de régulariser l'image. Les modalités précises de cette régularisation nous sont inconnues mais on peut vraisemblablement les assimiler à une ouverture selon un cercle* de diamètre 1 pas. L'espace poreux que l'on voit sur le moniteur de contrôle et qui est analysé par la logique est la fraction supérieure au "rayon de coupure" $r_c = 1/2$ pas.

Pour rattacher la porosité-plaque mince à la porosité pétrophysique il faut effectuer cette coupure de façon différente. L'injection de mercure sous pressions croissantes est un moyen : en admettant qu'à l'équilibre l'interface mercure-air soit sphérique le domaine poreux occupé par le mercure est réunion de toutes les sphères qu'on peut y inclure, de rayon supérieur ou égal à celui du ménisque. Ce domaine coïncide donc avec l'ouverture du réseau poreux selon la sphère de rayon celui du ménisque.

Nous proposons la démarche expérimentale suivante :

- pour une mesure à l'A.T. déterminer le rayon de coupure r_c
- lire sur la courbe d'injection la saturation correspondante :

$$S\left(\frac{0,6}{r_c}\right)$$

- en déduire la porosité au rayon de coupure r_c :

$$\varepsilon r_c = \varepsilon_0 \times S\left(\frac{0,6}{r_c}\right) \quad (\varepsilon_0 : \text{porosité totale})$$

- Comparer εr_c à la mesure en plaque mince.

2 - Discussion

La méthode proposée soulève deux objections :

- . L'espace envahi par le mercure au rayon R ne coïncide pas en général avec l'ouverture des pores selon la sphère B_R .
- . En plaque mince on mesure l'ouverture selon un cercle d'une section plane, alors qu'il faudrait mesurer une section plane de l'ouverture selon une sphère.

* Nous emploierons ici les termes courants de "cercle" et "sphère" mais les termes mathématiques exacts seraient "disque" et "boule".

a) "Effet d'injection"

L'envahissement des cavités poreuses par le mercure est tributaire des relations de connexité qu'elles présentent entre elles. A une pression d'injection correspondant au rayon R du ménisque une cavité poreuse ne contribue au volume envahi que s'il existe entre celle-ci et la zone d'injection un chemin laissant passer une boule de rayon R. Autrement dit si l'ouverture des pores comporte une partie connexe contenant à la fois la cavité et la zone d'injection. Sinon le mercure reste bloqué en amont du pore.

L'augmentation de pression permet au mercure de faire successivement irruption dans de nouvelles cavités en même temps qu'il comble de mieux en mieux les anfractuosités de celles qu'il avait déjà envahies. Mais, alors que l'effet de comblement est relativement régulier la brusque pénétration dans de nouveaux pores peut provoquer un accroissement très rapide du volume de mercure injecté. Au point qu'on a pu dire que le Purcell renseigne sur la granulométrie des "entrées de pores" plus que sur les pores eux-mêmes. Ceci n'est exact que dans les domaines où le gradient de saturation est important.

L'ouverture quant à elle ignore les relations de connexité. En langage imagé on pourrait dire qu'elle représente un "envahissement en place". Le mercure épouse progressivement les contours de l'espace poreux total, sans être gêné par les goulots d'étranglement.

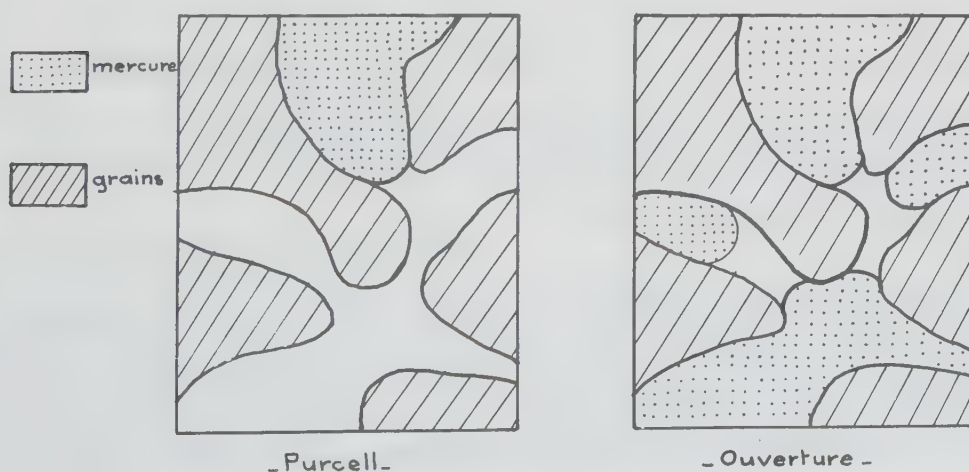


Fig. 5

Notons $\epsilon(r)$ la porosité totale correspondant au rayon r de la boule.

Les indices en position basse AT et P désignent respectivement l'ouverture et la méthode Purcell :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\omega}(r) & : \text{porosité de l'ouvert selon la sphère } Br \\ \varepsilon_p(r) & : \text{porosité Purcell à la pression } p = \frac{9,6}{r} \end{cases}$$

Il résulte de ce qui précède que systématiquement :

(V,2)

$$\varepsilon_P(r) \leq \varepsilon_{\omega}(r)$$

La différence $\varepsilon_{\omega}(r) - \varepsilon_p(r)$ est un biais qu'on nommera dans la suite "effet d'injection". On peut dans une certaine mesure en prévoir l'importance au vu du diagramme Purcell.

b) Différence entre cercle et sphère

Cette seconde objection, réelle sur le plan théorique, peut être supposée de peu de conséquences pratiques, en l'absence de pores aplatis et à condition que le rayon de coupure r_c ne soit pas "critique" pour le milieu poreux.

Justification

Remarquons tout d'abord que l'ouverture selon un cercle d'une section plane coïncide avec la section plane de l'ouverture du milieu selon un cercle parallèle au plan de la section. Nous sommes donc ramenés à la comparaison des sections planes de deux ouvertures différentes.

Mais par passage en moyenne les sections permettent de remonter aux volumes eux-mêmes. Le problème est donc à présent de comparer l'ouverture des pores selon une boule B_r et selon un cercle de même rayon parallèle à un plan donné.

Théoriquement c'est impossible : cercle et sphère sont des éléments structurants respectivement bi et tri-dimensionnels, irréductibles l'un à l'autre. Et cette objection peut avoir du poids pour les milieux fissurés par exemple. Dans la section des fissures orientées parallèlement au plan de section on pourra inclure des cercles de rayons bien plus grands que ceux des boules dans les fissures elles-mêmes.

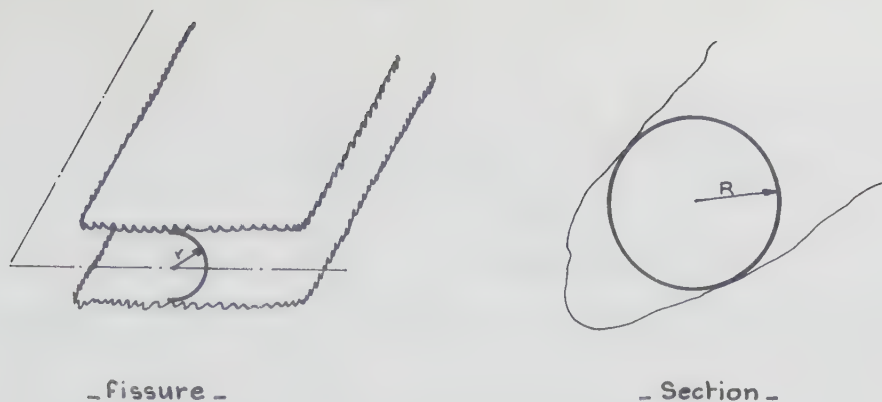


Fig. 6

De façon générale la différence joue quand il y a beaucoup de pores aplatis.

Plaçons nous en dehors de ce cas. Pour un rayon de coupure r_c donné on peut par la pensée séparer l'espace poreux en trois composantes :

- les pores de dimensions petites devant r_c
Ils sont supprimés par ouverture aussi bien selon Br_c que Dr_c (cercle de rayon r_c)
- les pores de dimensions grandes devant r_c
La variation de volume par ouverture est un infiniment petit du second ordre en r_c : la forme de l'élément structurant importe donc peu
- les pores de dimensions de l'ordre de r_c
On ne peut rien en dire, sinon qu'ils sont négligeables si leur volume total n'est pas trop important. (Ce qui se traduirait par un palier horizontal sur le diagramme Purcell)

Ainsi en général $\varepsilon_\omega \approx \varepsilon_{AT}$ (mesurée à l'analyseur).

3 - Résultats expérimentaux

Sur les 13 échantillons on a taillé 2 plugs voisins : l'un sert à confectionner une plaque mince après qu'on y eût mesuré la porosité par immersion, et l'autre à l'injection de mercure. Sur ce dernier plug la porosité a été également mesurée par immersion et c'est cette valeur qui sert de référence au calcul du pourcentage de saturation.

Soient

- $S(r)$: saturation au rayon r
- ε_0 : porosité de référence, mesurée par immersion
- $\varepsilon_p(r)$: porosité au mercure au rayon r

Par définition on a :

(V,3)

$$S(r) = \frac{\varepsilon_p(r)}{\varepsilon_o}$$

Cette valeur $S(r)$ n'est donc pas calculée sur le même plug que celui où la plaque mince a été taillée. Mais on peut de façon plausible supposer la permanence du spectre de porosité d'un plug à l'autre.

On trouvera ci-après les résultats des injections et les courbes correspondantes. Il faut noter que la graduation en microns correspond à la relation $\frac{7}{p}$ alors que nous utilisons $r = \frac{9,6}{p}$.

Dans ces 13 courbes on peut déjà remarquer DELF 3, 5, 7 et 12 qui présentent un palier vertical pour des pressions de quelques bars. Or le tableau d'analyse pétrographique (Ann.I) montre que ces 4 échantillons sont, parmi les 13 étudiés, ceux dont la teneur en argile (kaolinite ou chamosite) est la plus forte. Cette argile occupe du point de vue de l'écoulement une position stratégique en bloquant l'entrée des pores.

On a vu au chapitre précédent qu'en plaque mince l'argile a une fluorescence différente de celle des pores propres mais qu'on ne peut l'éliminer à coup sûr au moyen des seuils que si le contraste entre les deux constituants est supérieur à celui des inhomogénéités de coloration au sein des pores eux-mêmes. Ainsi il n'y a pas de problème pour DELF 12. En revanche l'incertitude sur DELF 3, 5 et 7 est grande et risque de causer des biais sur l'estimation de la porosité.

Le tableau 7 consigne les résultats de deux séries de mesures de ε_o et ε_w et le calcul correspondant de ε_p . A gauche de la colonne "Puits" sont notées les valeurs de la perméabilité K_h et de la porosité ε_o , mesurées sur le plug d'injection de mercure. On constate que si les porosités sont sensiblement égales d'un plug à l'autre (sauf pour DELF 12) les perméabilités varient beaucoup plus (cf. DELF 1, 3, 4, 11, 18).

TABLEAU 7

K_h Md	ε_o %	PUITS	K_h Md	ε_o %	ε_{AT1} %	ε_{P1} %	rc μ	ε_o %	ε_{AT2} %	ε_{P2} %	rc μ
71,1	10	DELF 01	3,4		7,5		1,5		9,2		0,8
2.844	23,8	DELF 02	2.485,7	23,6	22,8	20,5	0,9	23,6	24,3	20,2	1,5
7,5	18,6	DELF 03	19,4	21,3	9,3	7,6	1,5	21,3	11,4	9,8	0,8
49,2	14,3	DELF 04	90,9	14,3	11,4	10,6	1,8	14,3	11,2	10,7	1,5
1,5	13,1	DELF 05	2	13,9	6,1	6,2	1,5	13,9	11,2	8,6	0,73
1,6	18,8	DELF 07	1,5	18,6	7,7	9,4	0,6	18,6	8,2	9,4	0,6
45,7	20,5	DELF 08	53,2	20,5	20,4	11,8	0,73	20,5	19	11,8	0,73
160,9	21,1	DELF 11	266	22,4	22,8	19,7	0,73	22,4	23,6	19,7	0,73
0	4,1	DELF 12	0,25	8,4	7,8	0,76	2	8,4	8,9	1	1,5
3,5	9,8	DELF 14	2,5	10,3	7,2	5,6	2,3	10,3	7,8	5,6	2,3
3,1	11,8	DELF 18	12,4	13	8,4	5,7	2,3	13	7,5	5,9	1,8
0	7,7	DELF 19	0,9	8,3	1,1	0,8	2,3	8,3	1,2	0,8	2,3
49,9	11,4	DELF 20	55,1	12,3	6	6,7	2,3	12,3	7,4	7,2	2,3

4 - Commentaire des résultats

Les résultats du tableau 7 conduisent à distinguer deux situations :

- La mesure en plaque mince ε_{AT} voisine de la mesure pétrophysique ε_o : DELF 2, 4, 8, 11 et 12

Cela signifie qu'en plaque mince on voit l'espace poreux dans sa quasi-totalité : le volume des pores inférieurs au rayon de coupure est négligeable. La différence $\varepsilon_{AT} - \varepsilon_P \approx \varepsilon_o - \varepsilon_P$ mesure l'effet d'injection. Il est particulièrement important sur DELF 8 et 12. Pour DELF 12 il ne faut pas s'en étonner puisqu'aux rayons de coupure de 1,5 et 2 μ , soit aux pressions de 6,4 et 4,3 kg/cm^2 , la courbe de saturation présente un fort palier vertical. La kaolinite et l'illite font bouchon au point d'ailleurs d'inhiber la perméabilité.

- La mesure en plaque mince diffère significativement de la mesure pétrophysique (dans tous les autres cas)

La fraction de porosité qui n'apparaît pas sur plaque mince est importante. La porosité équivalente ε_p est très proche de ε_{AT} . Sur DELF 19 par exemple ε_o et ε_{AT} sont dans un rapport de 1 à 7 alors que ε_{AT} et ε_p sont voisines.

Portons les points expérimentaux sur un graphique d'axes ε_{AT} et ε_p .

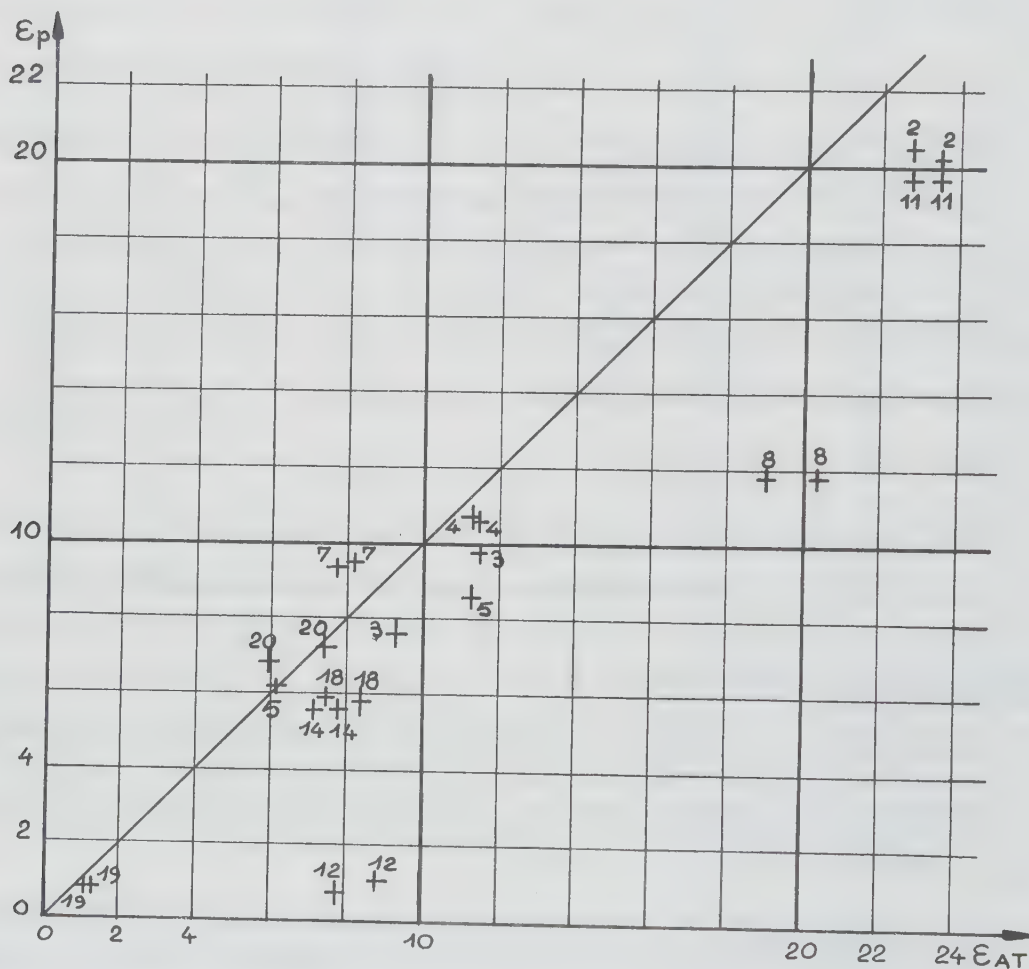


Fig. 8

Conformément à la théorie les points sont bien généralement situés sous la première bissectrice $\varepsilon_{AT} > \varepsilon_p$, aux incertitudes près. Seul DELF 7, malgré des mesures répétées, refuse de vérifier cette inégalité. Apparemment l'origine du phénomène est à attribuer aux inhomogénéités de coloration déjà signalées pour cet échantillon. La porosité doit être sous-estimée et même l'effet d'injection ne suffit pas à compenser ce biais.

Certes ces biais sont fâcheux mais il faut se souvenir que plus la méthode d'investigation est précise plus on se rend compte de ses imprécisions. A titre d'illustration voici regroupées sur un même tableau les estimations de porosité effectuées sur les 20 lames par deux pétrographes différents travaillant, l'un au compteur de points, l'autre au jugé (cf. diagnoses jointes en Annexes),

DELF		Compteur de points (300 pts/lame)%	Analyseur de textures %
1	2	12,5	8
2	—	14,0	23,5
3	10	7	10,4
4	0	14,5	10,8
5	3	14,5	8
6	8	5	—
7	7	14,5	8
8	13	15	11
9	1	0,5	—
10	3	14,5	—
11	15	12,3	23
12	2	8,5	8,5
13	9	5	—
14	6	5,5	7,5
15	3	14,5	—
16	—	0	—
17	2	5	—
18	9	8	8
19	0	2,5	1,2
20	—	1	1,7

V - CONCLUSION

L'espace poreux atteint par l'observation en plaques minces diffère du domaine d'investigation des méthodes pétrophysiques. Quand la visualisation et le contraste sont corrects on a pu représenter le passage d'un domaine à l'autre par une ouverture selon un cercle de diamètre égal à la résolution de l'appareillage.

Il n'est pas possible d'affirmer a priori qu'une méthode soit intrinsèquement meilleure que l'autre. Dans l'optique de la connaissance du milieu poreux elles sont complémentaires, l'observation pétrographique permettant une étude plus fine du milieu et une meilleure utilisation des résultats pétrophysiques. Mais on peut aussi se demander si des porosités mesurées jusqu'à 300 Å² présentent un intérêt pratique. Les argiles ou les pores des amas microcristallins contribuent de façon négligeable aux écoulements. D'ailleurs l'usage est d'effectuer une "correction d'argile" en évaluant sommairement la teneur en argile et sa porosité interne. La précision du calcul n'est sans doute pas fameuse et il peut être incorrect d'éliminer toute la porosité des argiles alors que celle-ci contribue parfois à la production d'huile.

Par le choix des conditions d'observation et grâce à la logique de l'Analyseur de Textures on peut sélectionner en plaques minces la fraction des pores de "taille supérieure à ...". C'est à l'expérience d'établir si la porosité ainsi évaluée est plus ou moins "utile" que les autres.

PURCELL

- 96 -

FIG: _____

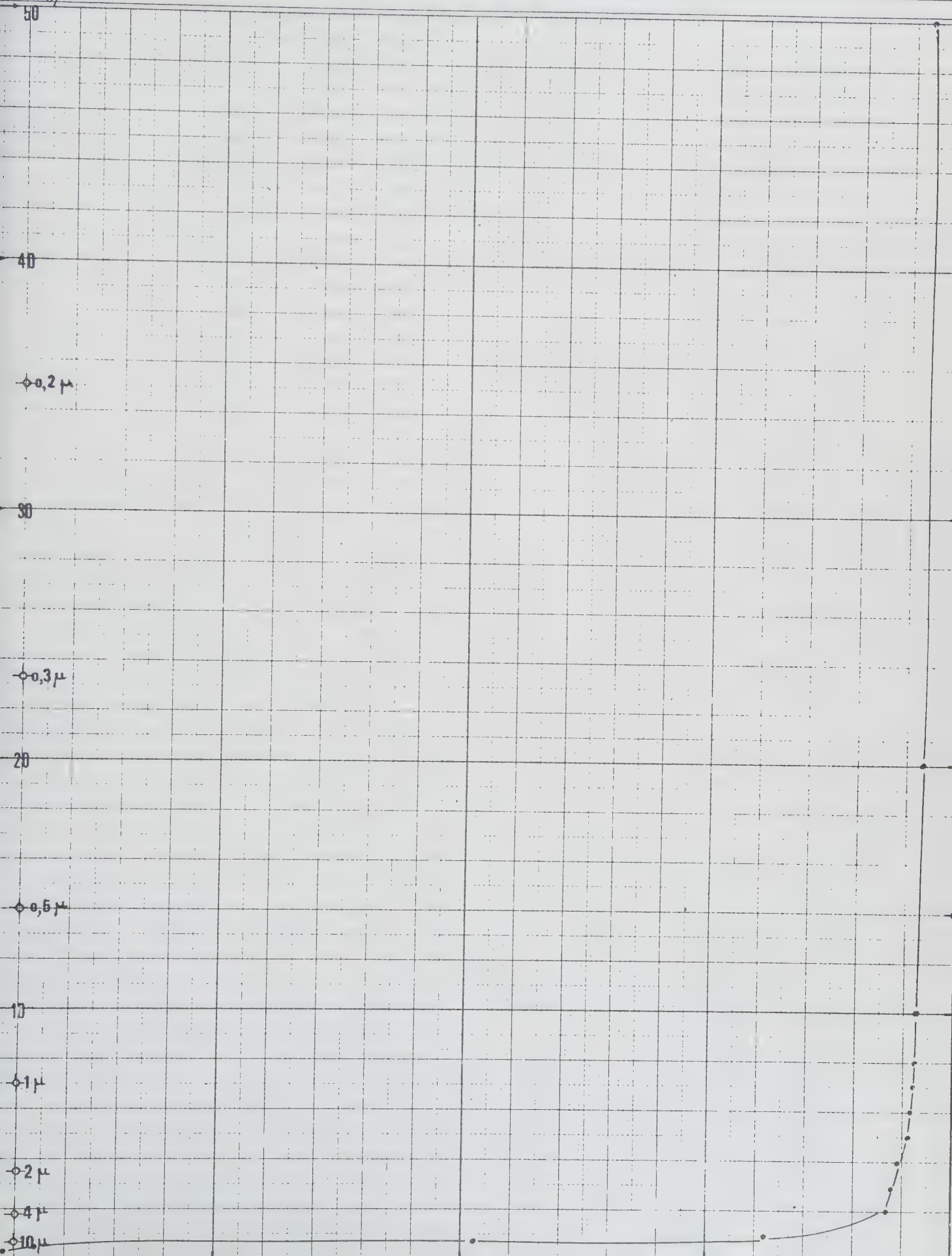
Z: _____ Puits: DELE 1

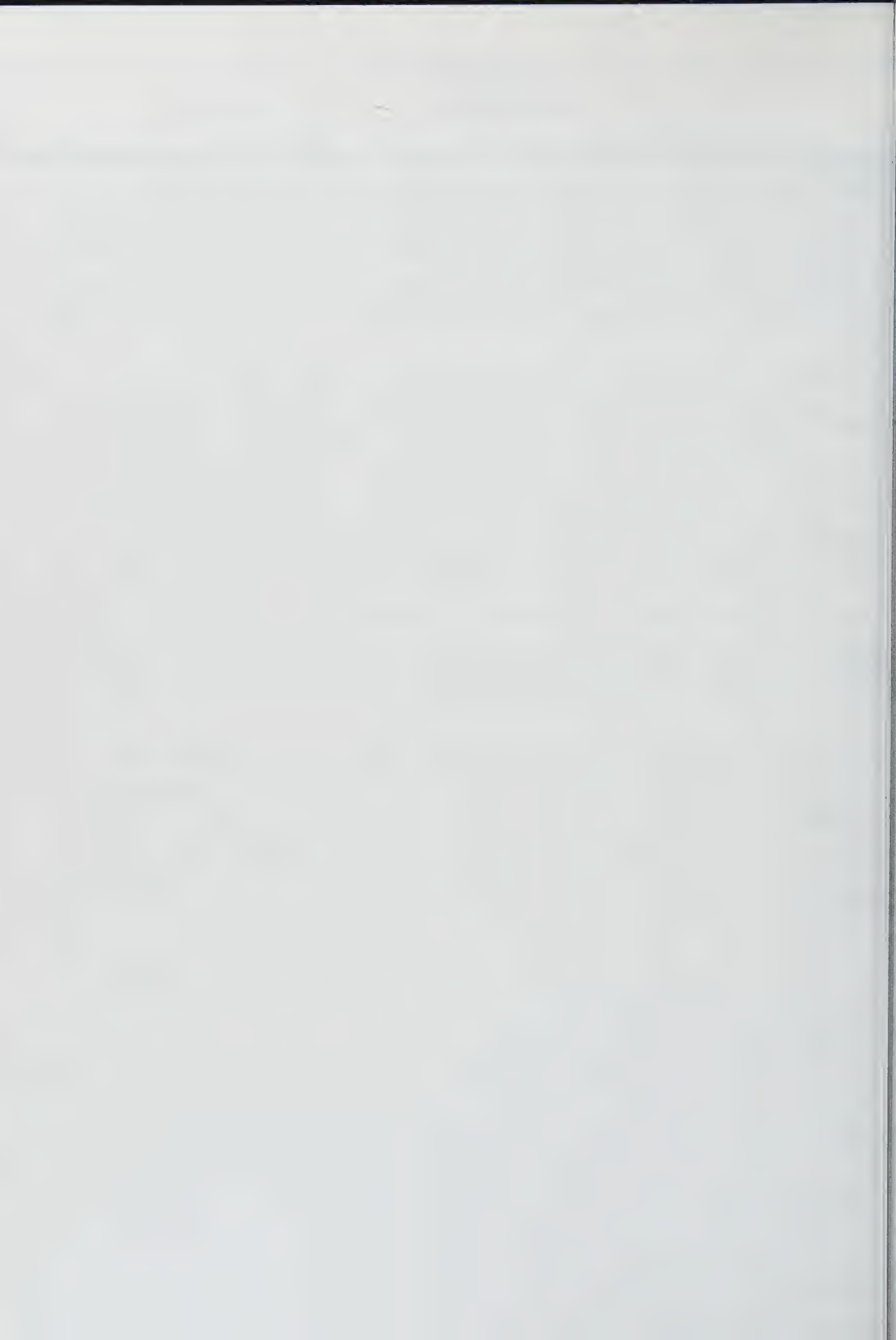
K_h : 16.1 Md

f: 10%

K_v : _____

en kg/cm^2





PURCELL

- 97 -

FIG: _____

Z: _____

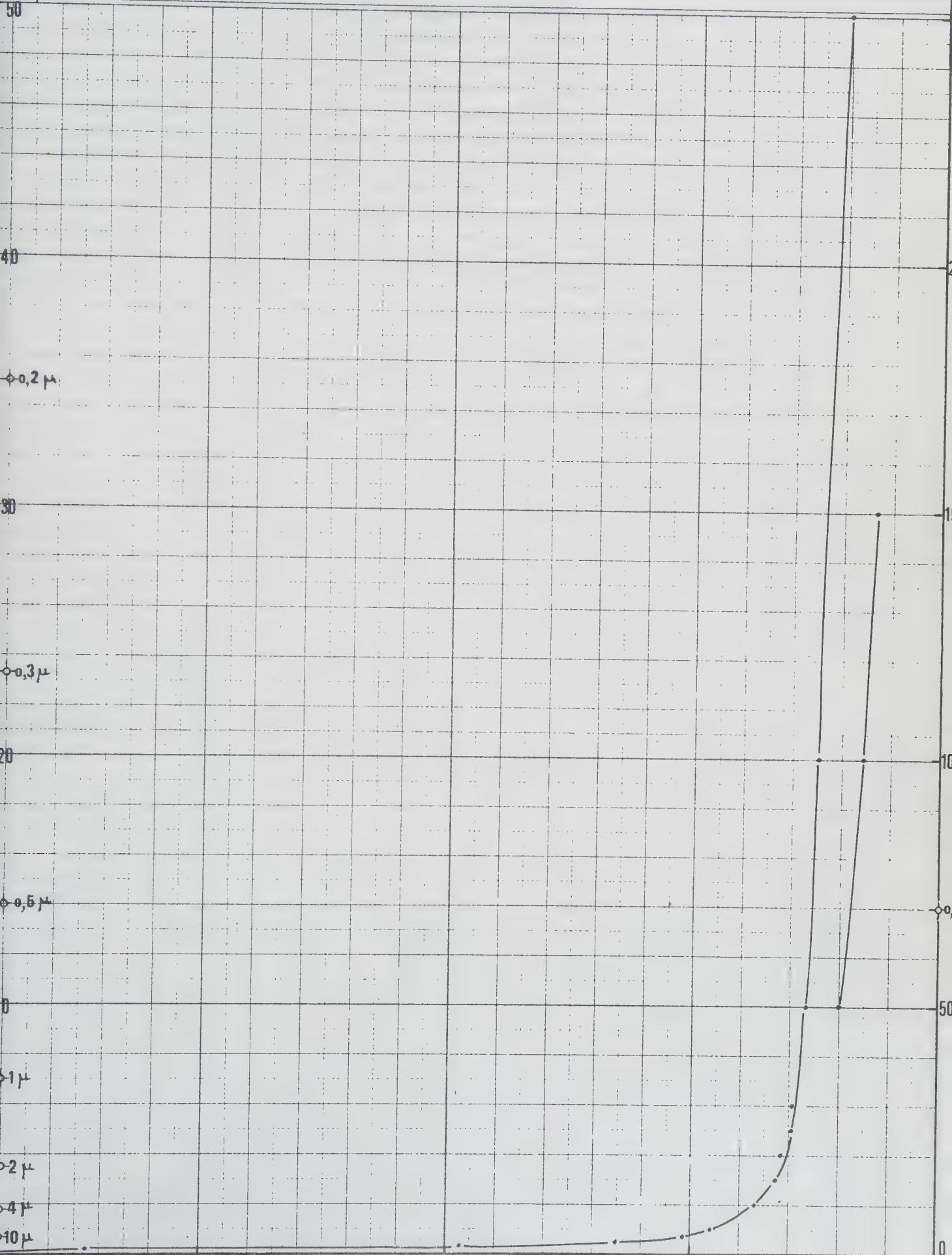
Puits: DELF2

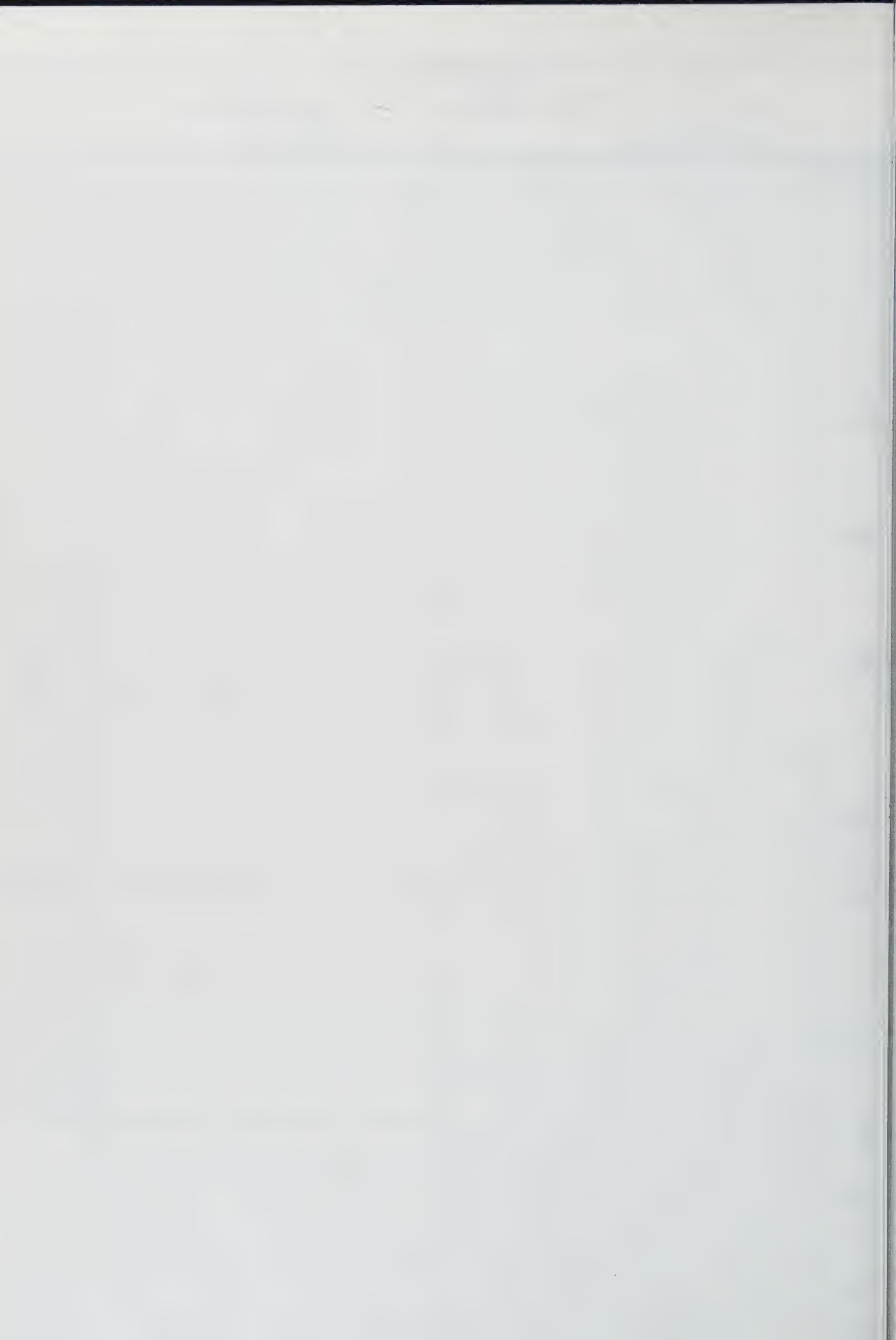
K_h : 2844 Md

f: 23,8%

K_v : _____

kg/cm²





PURCELL

- 98 -

FIG: _____

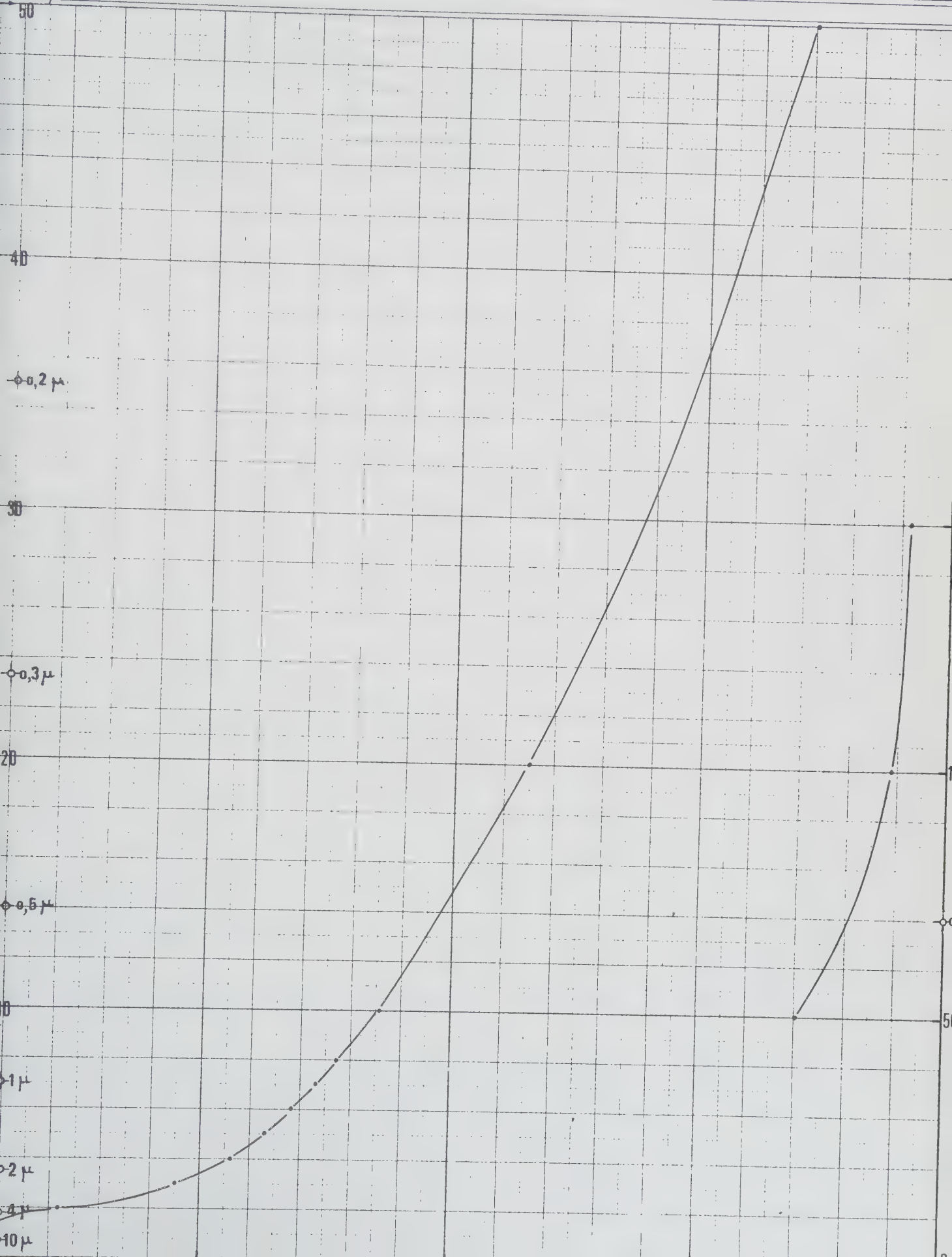
Z: _____ Puits: DELE3 _____

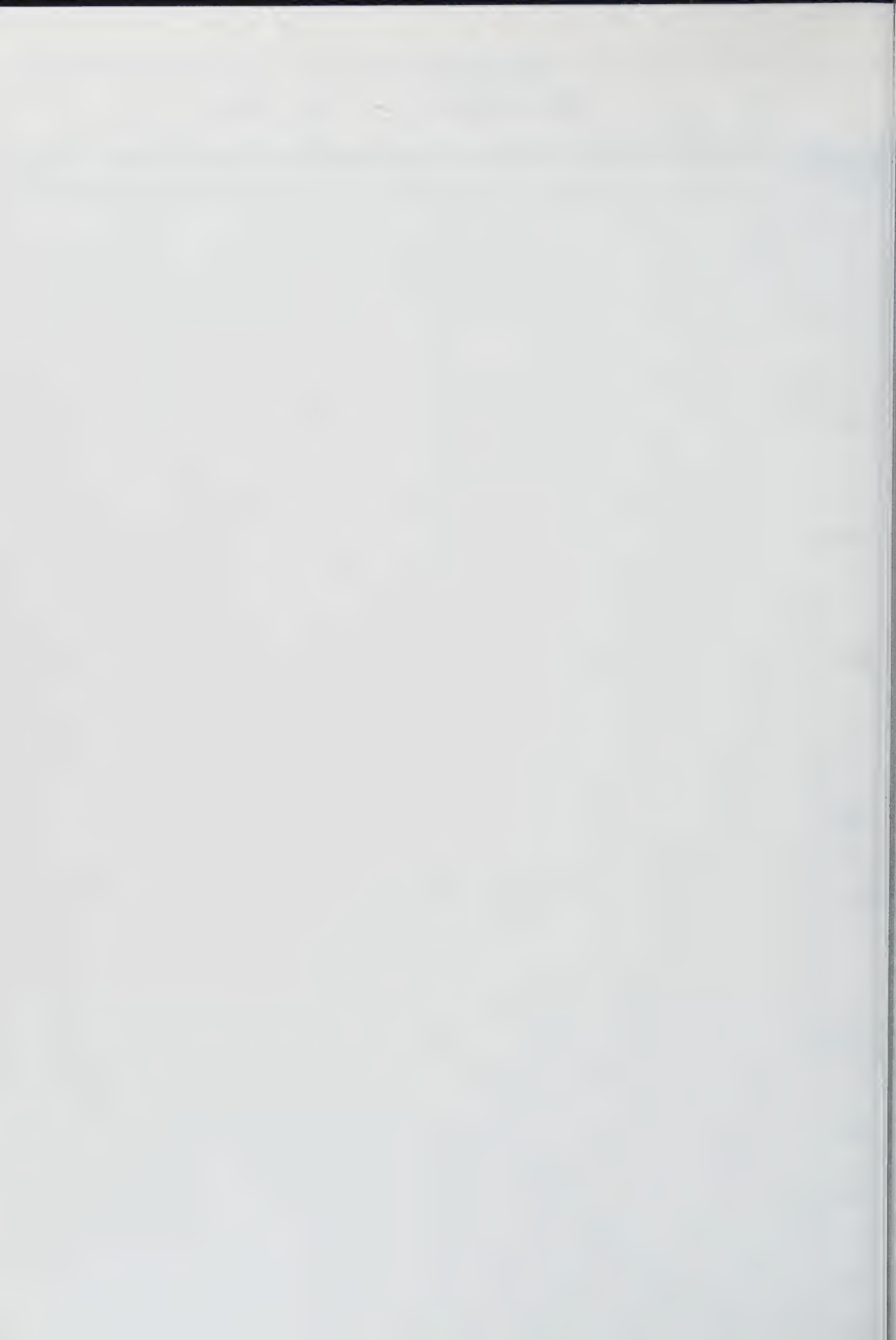
f: 18,6 %

K_h : 75 Md

K_v : _____

en kg/cm²





PURCELL

- 99 -

FIG: _____

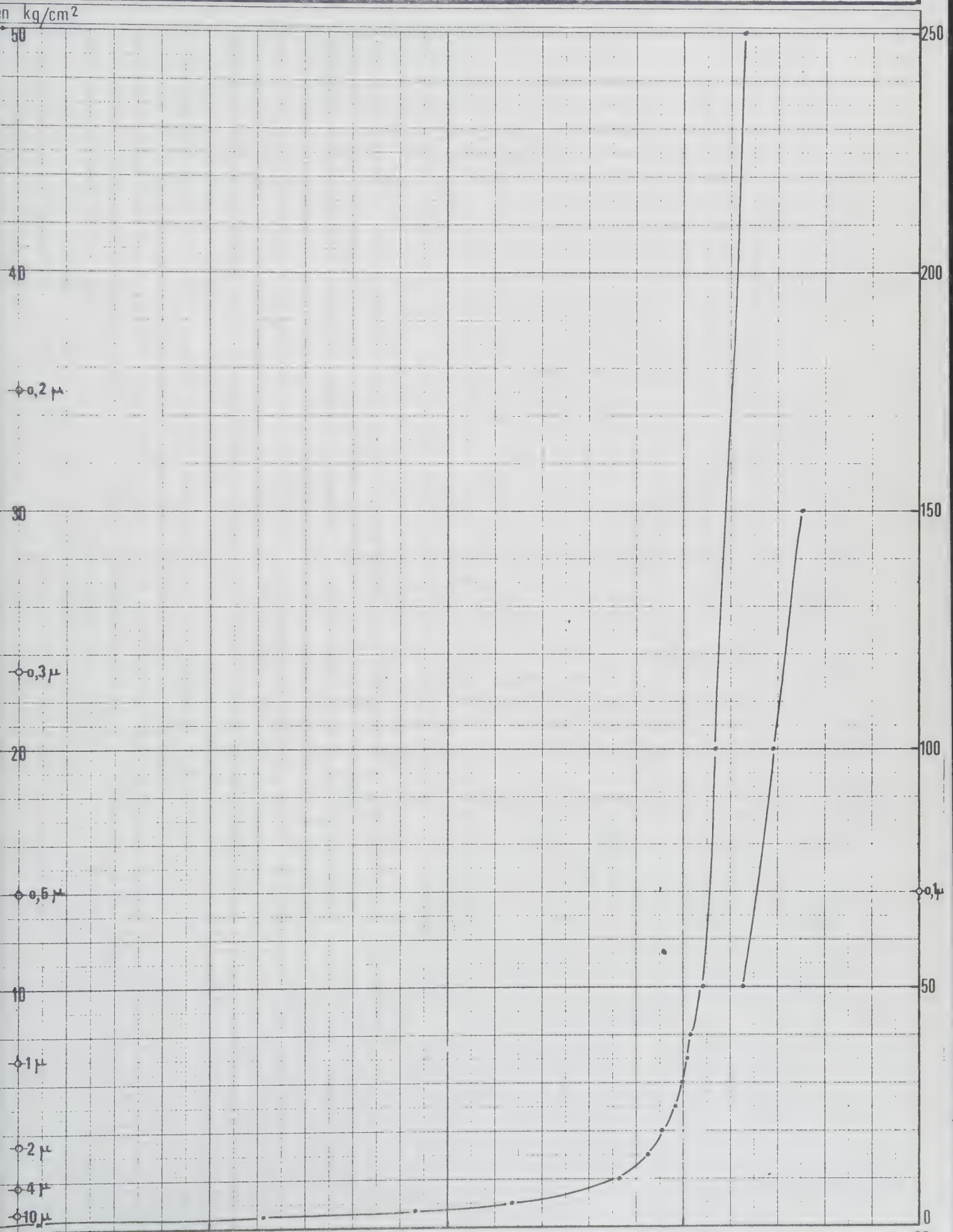
Z: _____

Puits: DELF4

K_h : 49,2 Md

f: 14,3%

K_v : _____





PURCELL

- 100 -

FIG: _____

Z: _____

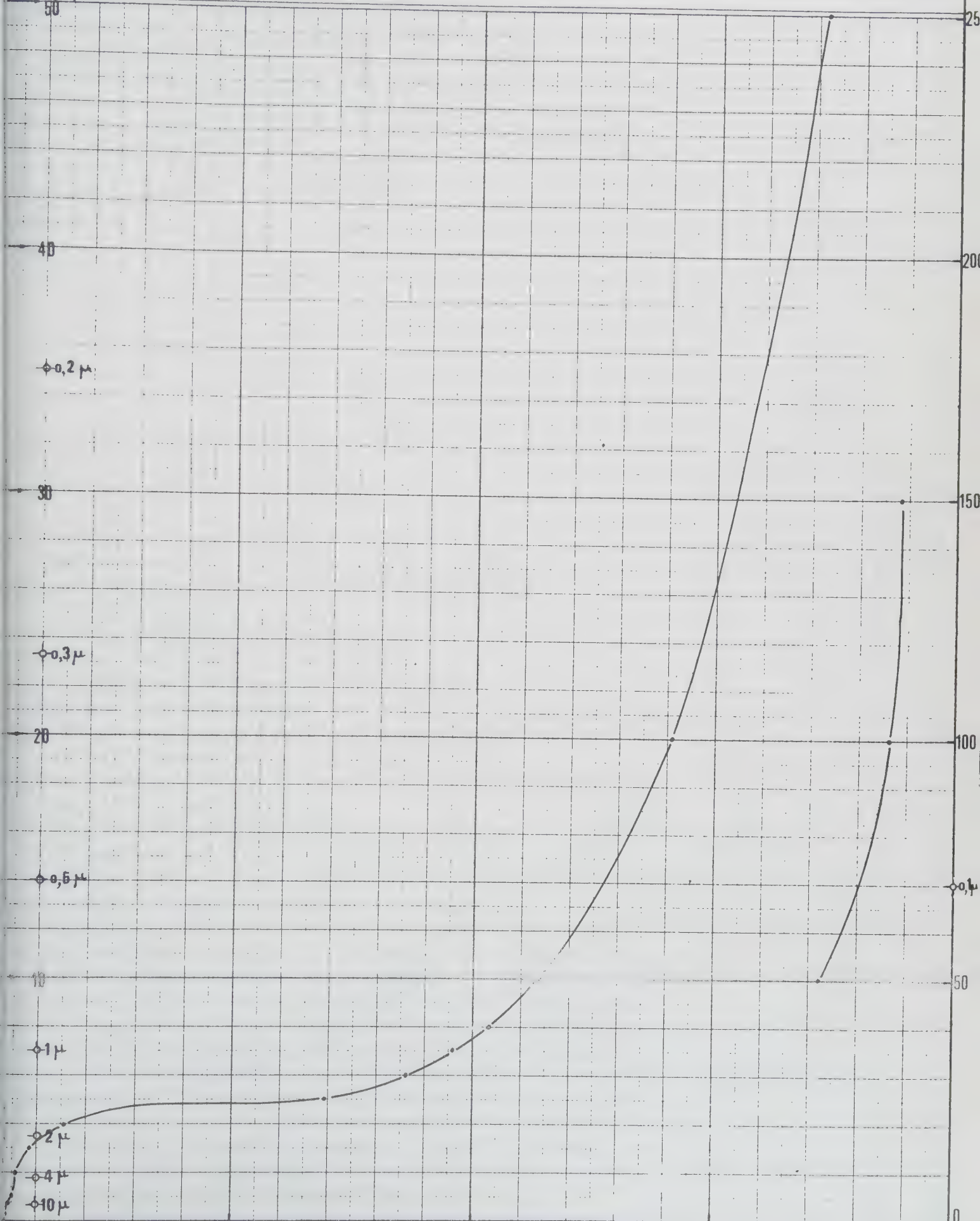
Puits: DELE 5

K_h : 1,5 Md

f: 13,1%

K_v : _____

P. en kg/cm^2





PURCELL

Z: _____ Puits: DELF 7

f: 18,8 %

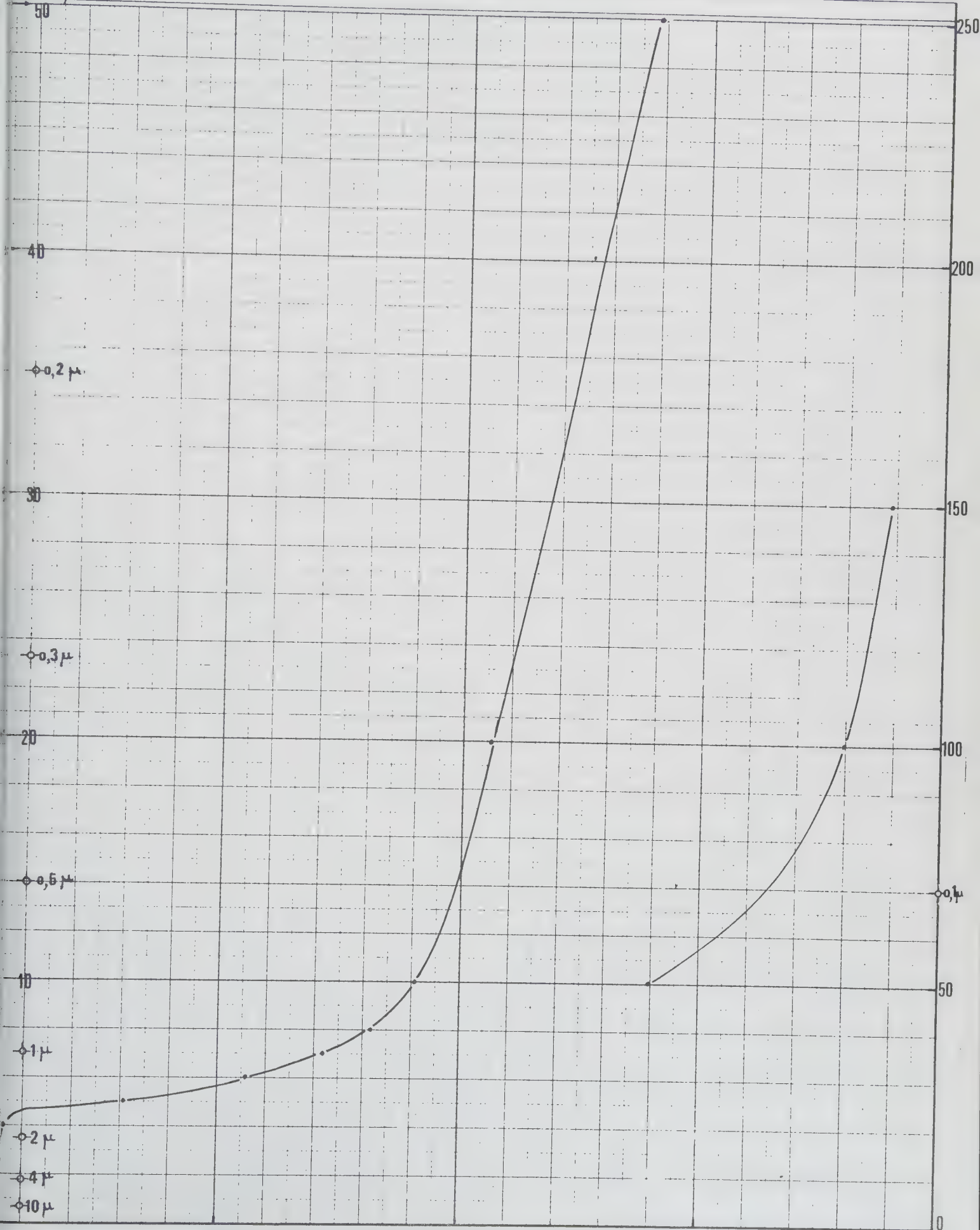
- 101 -

FIG: _____

K_h : 1,6 Md

K_v : _____

en kg/cm^2





PURCELL

- 102 -

FIG: _____

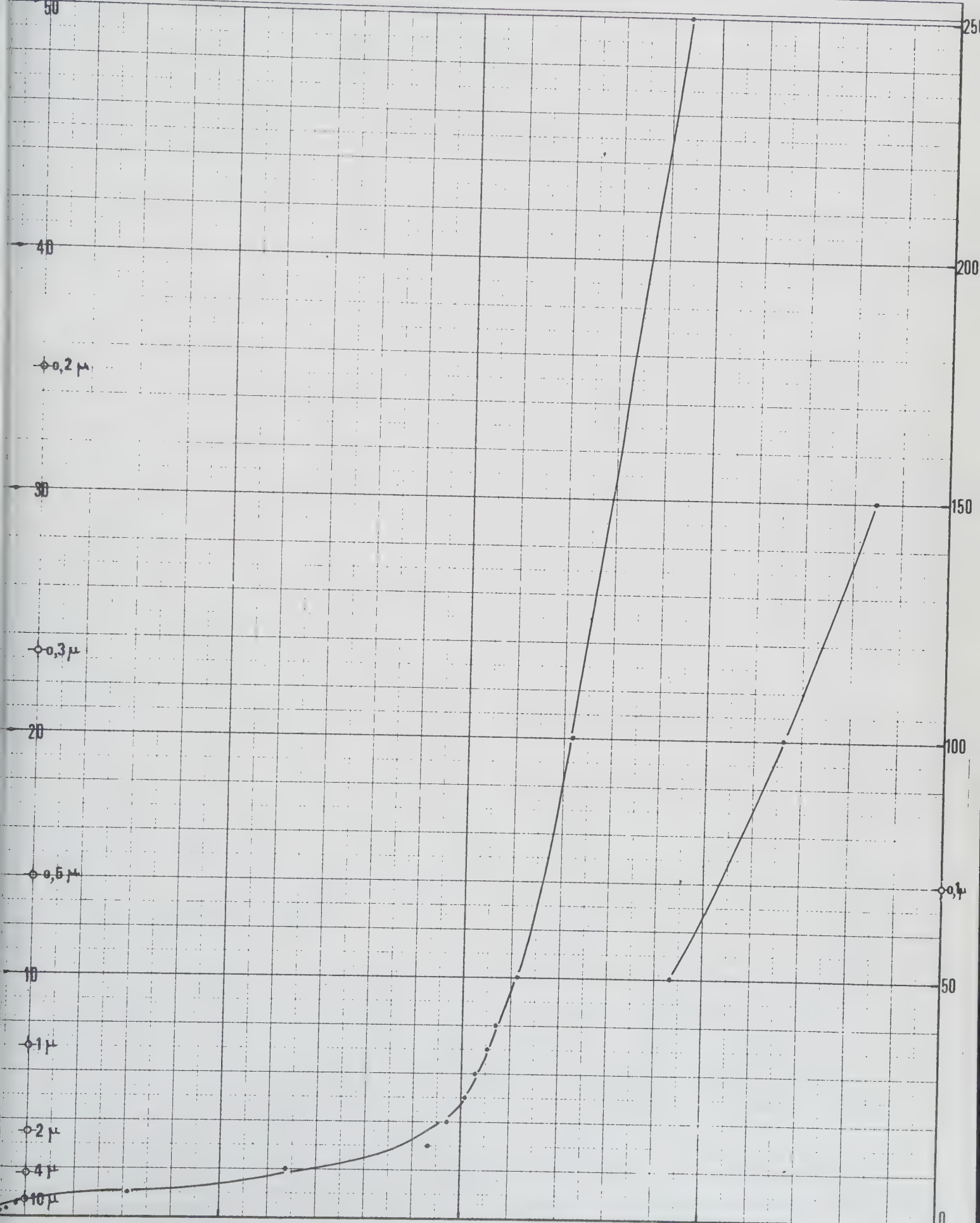
Z: _____ Puits: DELF 8

f: 20,5% _____

K_h : 45,7 Md

K_v : _____

ρ en kg/cm^2





PURCELL

- 103 -

FIG: _____

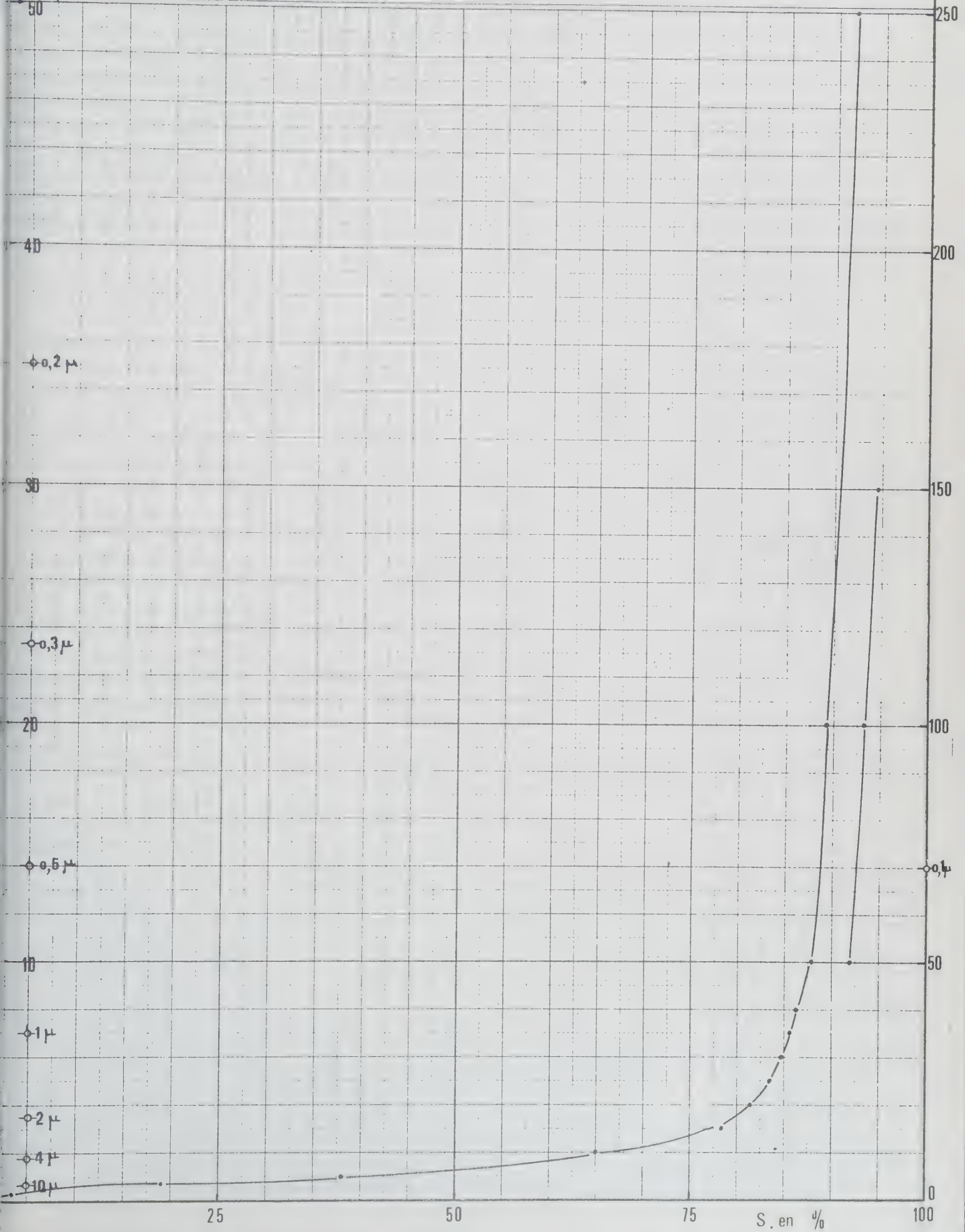
Z: _____ Puits: DELF 11

K_h : 160,9 Md

f: 21,1%

K_v : _____

en kg/cm^2





Z: _____

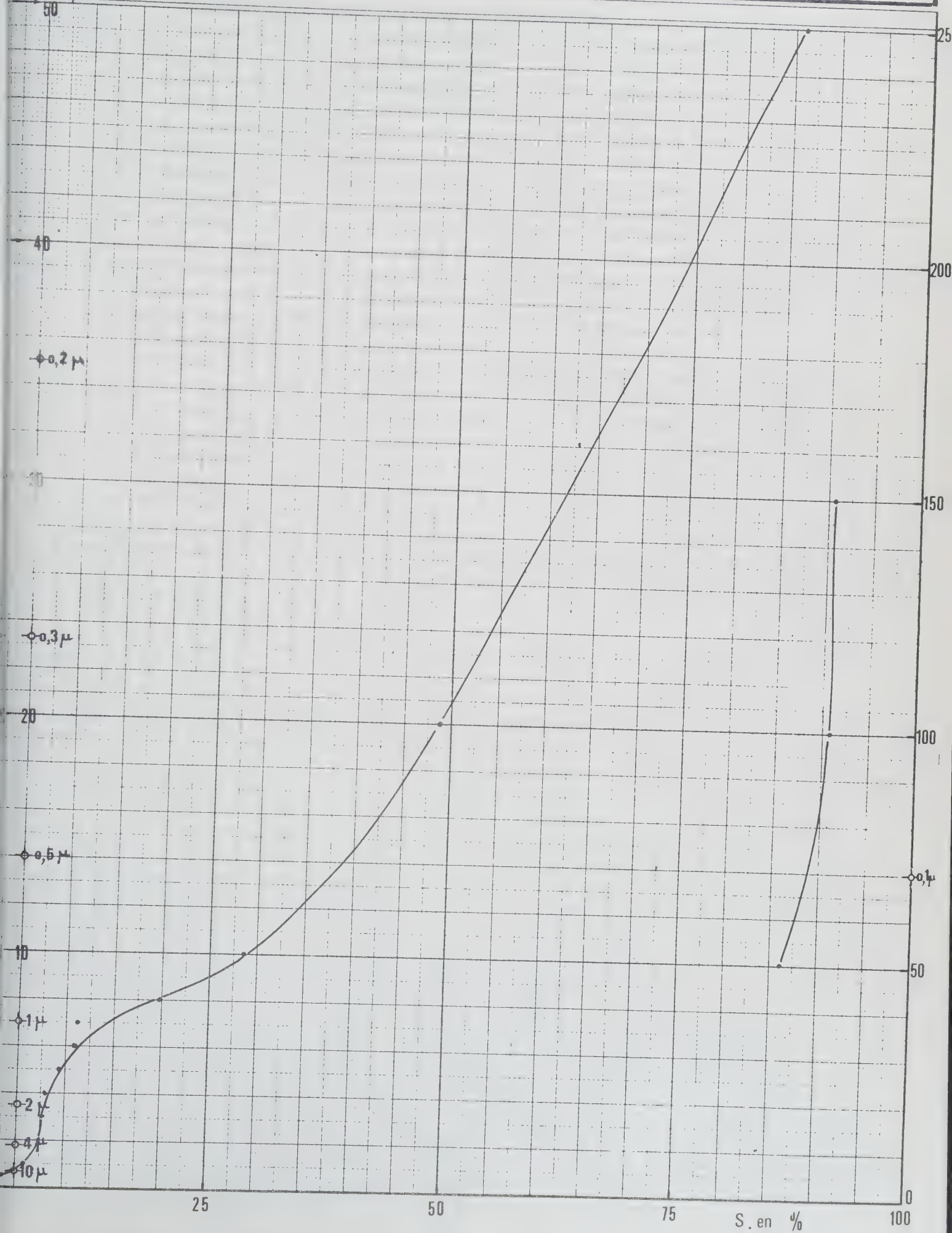
Puits: DELF 12

K_h : 0.04

f: 4,1%

K_v : _____

ρ en kg/cm^2



PURCELL

Z: _____

Puits: DELF 14

- 105 -

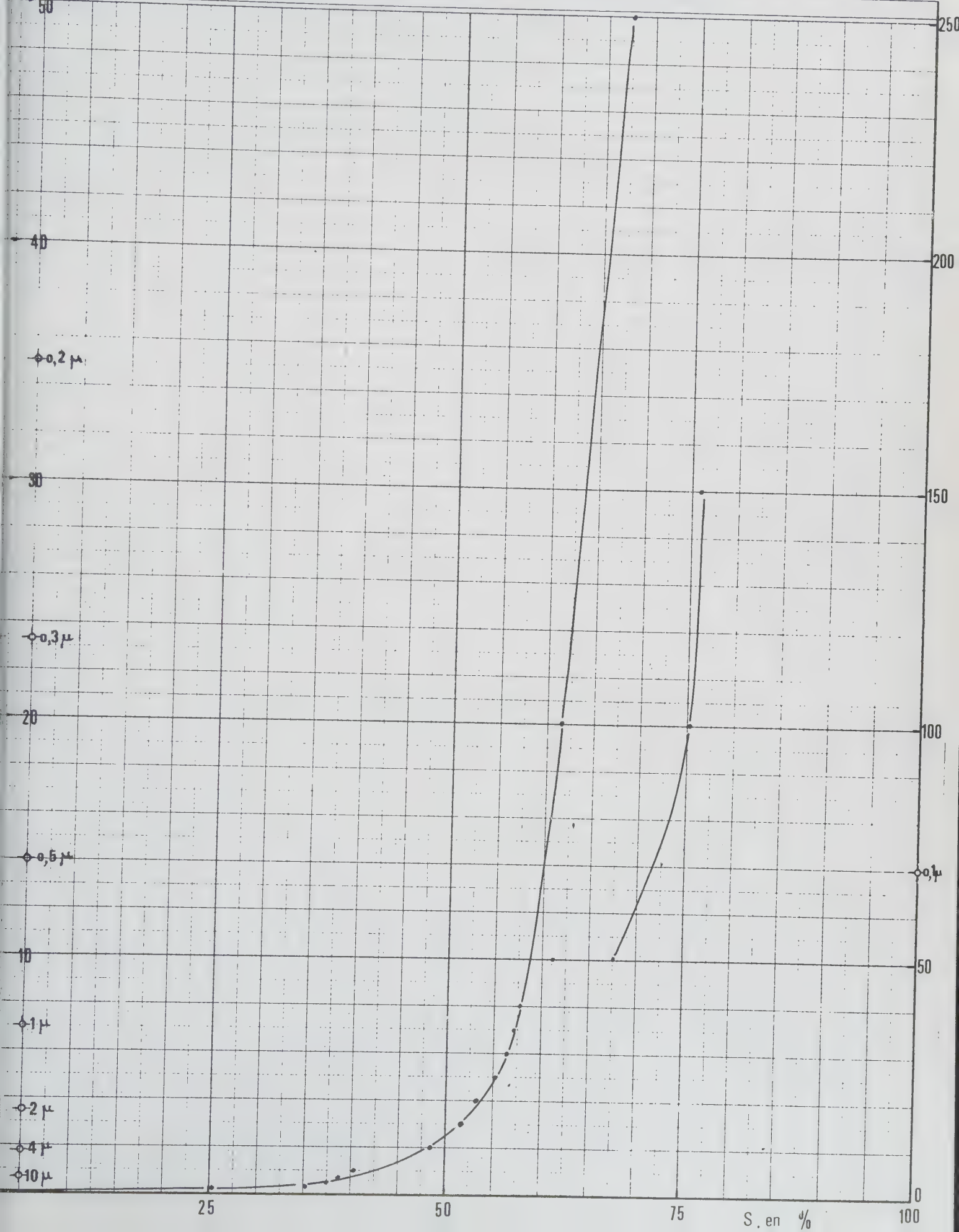
FIG: _____

f: 9,8%

K_h : 3,5 Md

K_v : _____

en kg/cm^2





PURCELL

- 106 -

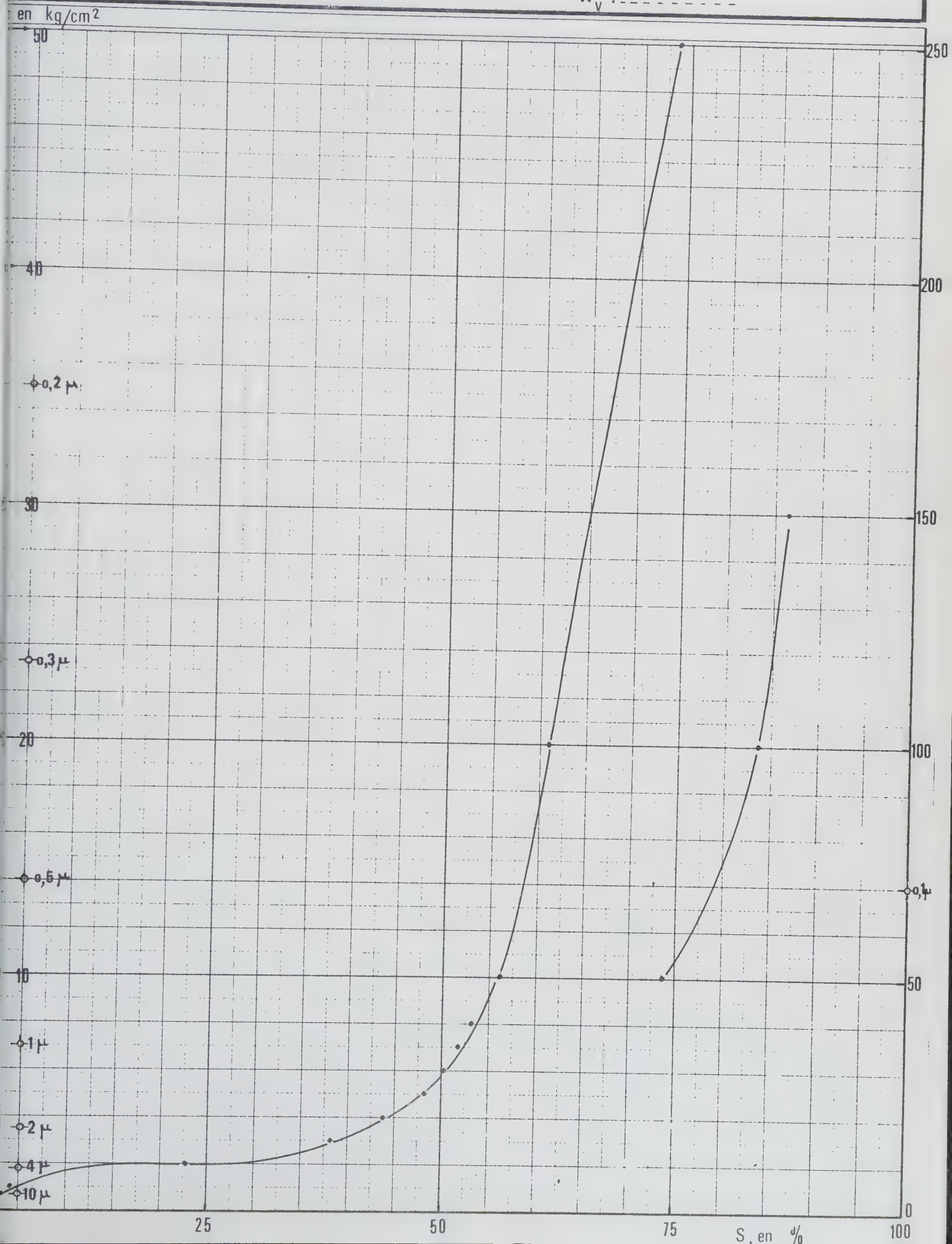
FIG: _____

Z: _____ Puits: DELF 18

f: 11,8%

K_h : 3,1 Md

K_v : _____



PURCELL

- 107 -

FIG: _____

Z: _____

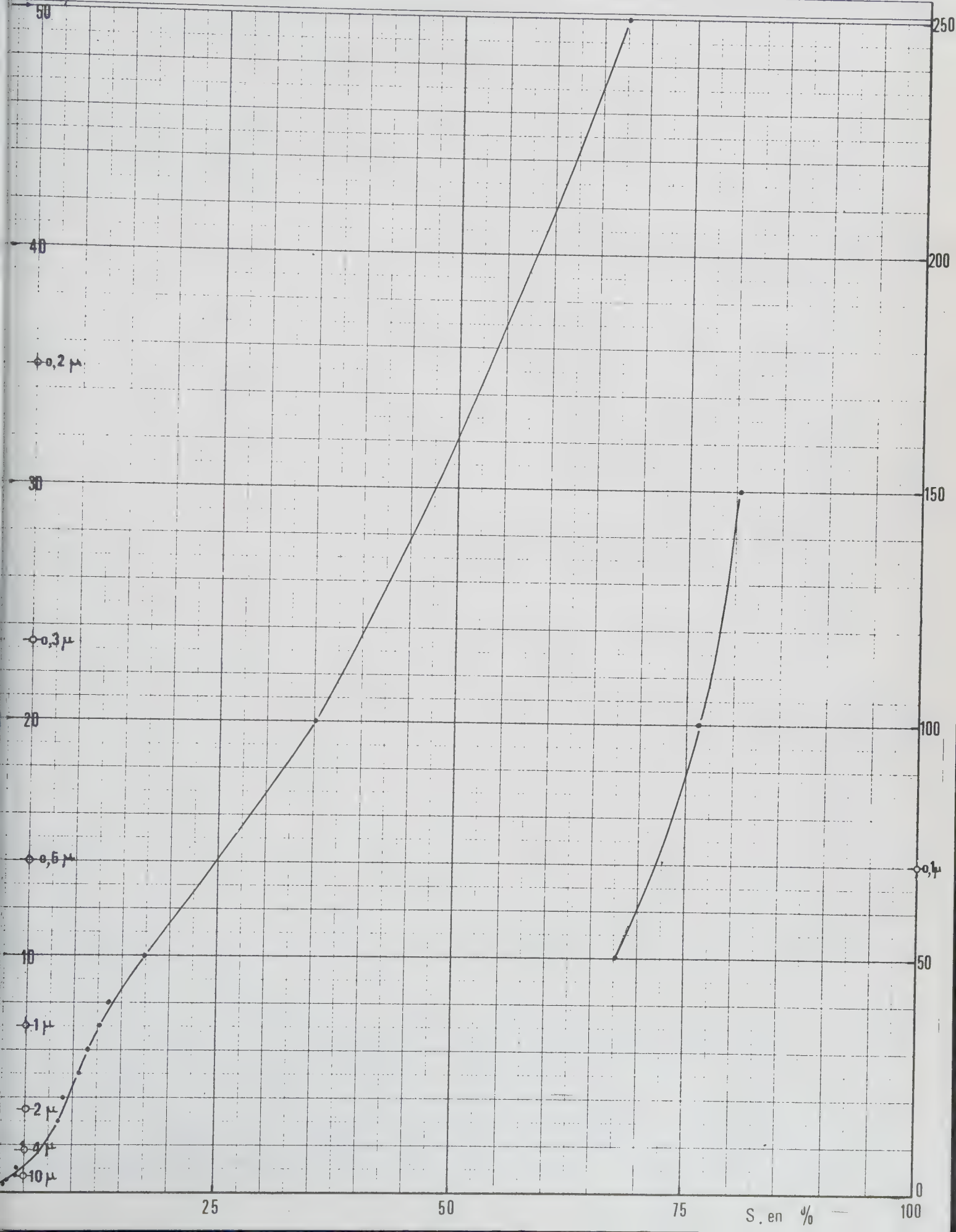
Puits: DELF 19

K_h : 0. Md

f: 7,7%

K_v : _____

en kg/cm^2



PURCELL

Z: _____

Puits: DELE 20

- 108 -

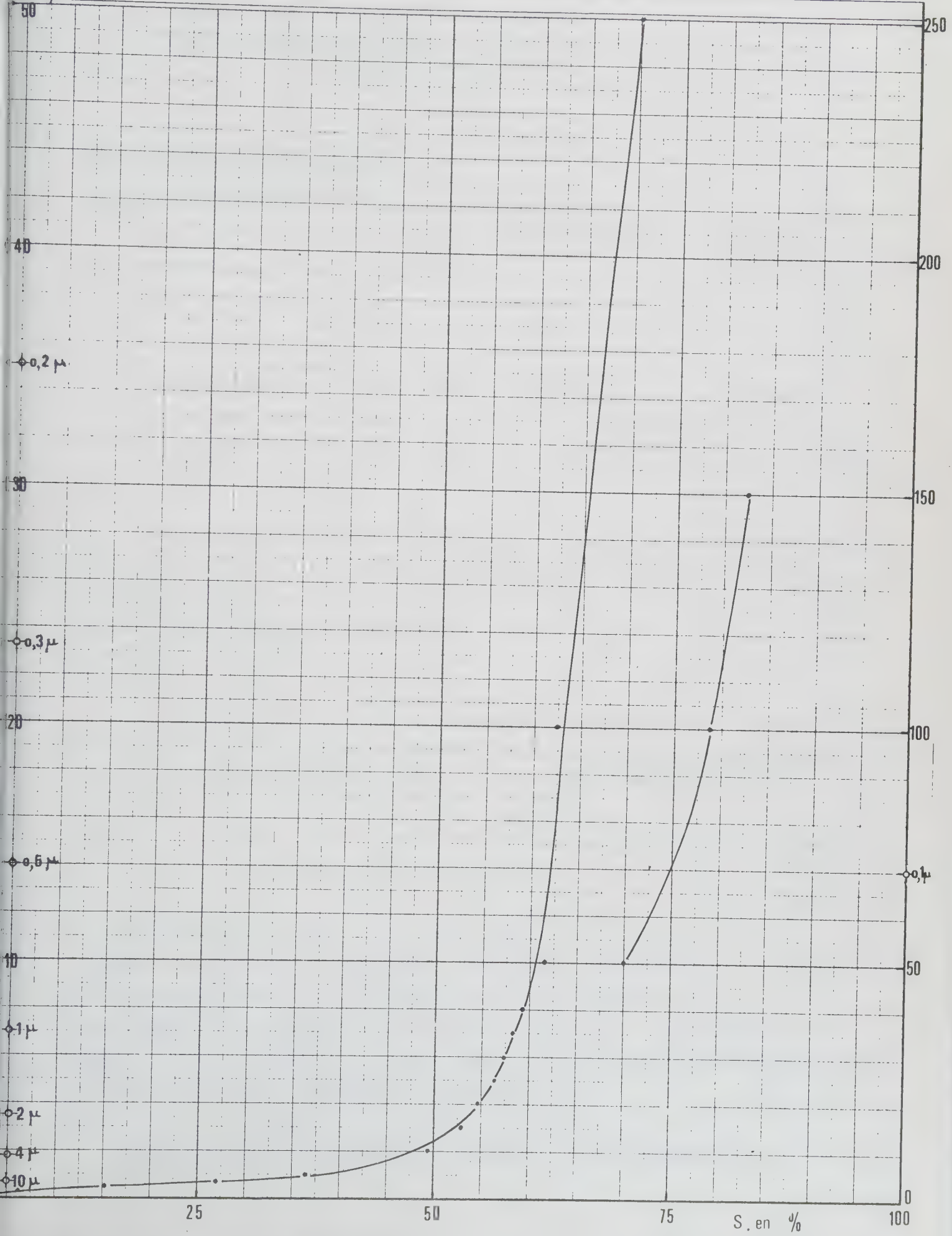
FIG: _____

f: 11,4%

K_h : 49,9 Md

K_v : _____

n kg/cm²





CHAPITRE VI

LA COVARIANCE : CLE DE L'ANALYSE STRUCTURALE DU MILIEU POREUX

I - DEFINITIONS ET GENERALITES

1 - Signification énergétique de la covariance

La covariance d'une fonction aléatoire stationnaire $f(x)$ est l'espérance du produit $f(x) f(x+h)$:

(VI,1)

$$C(h) = E[f(x) f(x+h)]$$

Elle ne dépend que de h qui est un vecteur. La covariance a donc une signification directionnelle et met en évidence les anisotropies. Pour une direction α fixée elle devient fonction de variable réelle.

Les fonctions aléatoires qui interviennent en Morphologie Mathématique sont bien particulières puisqu'elles n'admettent que les valeurs 0 ou 1. Mais la richesse de la fonction de covariance n'est pas tributaire de cette hypothèse : elle tire ses origines de considérations très profondes.

La théorie des fonctions aléatoires montre que la covariance d'un processus stationnaire possède une signification énergétique : c'est la transformée de Fourier de l'énergie spectrale $d\sigma^2(\lambda)$:

(VI,2)

$$C(h) - m^2 = \int_0^\infty \cos \lambda h d\sigma^2(\lambda)$$

$(C(h) - m^2)$: covariance centrée

m : moyenne

Les électroniciens connaissent bien cette mesure $d\sigma^2(\lambda)$ qui résoud le problème de l'analyse harmonique, c'est-à-dire l'affectation de l'énergie d'un signal à des fréquences différentes. La covariance est de même nature. Simple question de vocabulaire on appelle ici "densité de variance" ce qu'ils nomment "puissance moyenne dans la bande de fréquence $(\lambda, \lambda+d\lambda)$ ".

Mais que serait l'analyse harmonique d'une image ?

Formellement, tout d'abord, une image plane est une fonction à deux variables : une photographie en noir et blanc associe à chaque point x une intensité de gris, le vidéo-signal de la caméra TV traduit ces intensités en tension électrique. L'analyse harmonique de l'image est celle de la fonction qui lui correspond.

Ainsi une image de teinte uniforme, toute blanche par exemple, donne un signal, donc une covariance, constant. Son énergie est concentrée à la fréquence 0 : c'est l'image basse fréquence par excellence. Au contraire une image très contrastée est riche en hautes fréquences. En technique photographique le filtrage des basses fréquences est un procédé d'amélioration du contraste [49]. L'exemple extrême d'image à hautes fréquences serait celle de point infiniment lumineux répartis sur un fond noir (mesure de Dirac) mais la covariance serait alors définie en tant que mesure et non plus en tant que fonction.

La transformation de Fourier échange les propriétés de décroissance à l'infini de la fonction de répartition de l'énergie spectrale avec les propriétés de continuité à l'origine de la covariance. Une image basses fréquences, toute en dégradés, peut avoir une covariance dérivable à l'origine. Les images en noir et blanc sur lesquelles nous travaillons présentent évidemment de forts contrastes aux frontières des constituants et la covariance ne peut être dérivable à l'origine : elle y possède une dérivée à droite et à gauche égales en module mais de signe opposé, dont la valeur traduit précisément l'importance des discontinuités ; selon la dimension de l'espace : leur nombre, leur périmètre ou leur surface.

2 - Covariances croisées

En termes d'ensembles aléatoires la covariance est le moment fonctionnel relatif à l'élément structurant constitué de deux points distants de h .

$$C(h) = \text{Prob}\{x \in A, x+h \in A\}$$

Mais on peut aussi imposer que x appartienne à A et $x+h$ soit disjoint de A . Notons par $k(x)$ l'indicatrice des grains A , et désignons par l'indice 1 les grains et 0 les pores.

$$C_{10}(h) = \text{Prob}\{x \in A, x+h \in A^c\} = E[k(x)(1-k(x+h))]$$

Covariances (droites) et covariances croisées ne sont pas indépendantes puisque évidemment :

$$(VI,3) \quad \boxed{\begin{aligned} C_{00}(h) + C_{01}(h) &= p_0 \\ C_{10}(h) + C_{11}(h) &= p_1 \end{aligned}} \quad (p_0 + p_1 = 1)$$

et $C_{01}(h) = C_{10}(h)$ car $E[(1-k(x)) k(x+h)] = E[k(x)(1-k(x+h))]$

Il en résulte que dans le cas particulier d'un milieu à deux composantes la covariance des grains se déduit de celle des pores par une simple translation :

$$(VI,4) \quad \boxed{C_{11}(h) = C_{00}(h) + 1 - 2 p_0}$$

On généraliserait au cas où n constituants sont en présence en posant, avec des notations analogues :

$$C_{ls}(h) = E[k_l(x) k_s(x+h)]$$

En décomposant l'évènement "x appartient au constituant l" en évènements incompatibles on retrouve le système (VI,3) :

$$(VI,5) \quad \boxed{C_{ll}(h) + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq l}}^n C_{ls}(h) = p_l \quad \forall h, \forall l} \quad \left(\sum_l p_l = 1 \right)$$

Pour plus de trois constituants la donnée des covariances croisées contient plus d'information que celle des covariances droites.

II - PROPRIETES A L'ORIGINE DE LA COVARIANCE

Comme on s'intéresse ici à l'espace poreux $C(h)$ désignera en général dans la suite du texte la covariance des pores.

1 - Porosité

$C(0)$ est la porosité.

En un point x fixé $k(x)$ est une variable aléatoire binomiale de moyenne $E[k(x)] = C(0)$ et de variance $C(0) - C^2(0) = pq$. C'est la valeur à l'origine de la covariance centrée $C(h) - q^2$.

2 - Surface spécifique

La dérivée à l'origine de la covariance indique le nombre de transitions grain-pore par unité de longueur, dans la direction α . En effet la probabilité qu'il existe une transition grain-pore dans l'intervalle infinitésimal dh est :

$$\text{Prob}\{x \in A, x+h \notin A\} = C_{\alpha}(0) - C_{\alpha}(dh) = -C'_{\alpha}(0)dh$$

Dans le plan où l'espace $-C'_{\alpha}(0)$ a le sens géométrique d'une "variation diamétrale" : demi-somme des projection sur le sous-espace orthogonal à la direction α des éléments (d'aire ou de longueur) du contour limite des grains. Lorsque les grains sont convexes la variation diamétrale s'identifie avec le contour apparent.

On montre que le périmètre spécifique 2λ , périmètre des pores par unité de surface a pour espérance :

$$(VI,6) \quad E(2\lambda) = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} C'_{\alpha}(0) d\alpha$$

De même la surface spécifique σ , aire de la surface limite des pores par unité de volume :

$$(VI,7) \quad E(\sigma) = -\frac{1}{\pi} \int_S C'_{\alpha}(0) d\alpha \quad \begin{array}{l} \text{intégration sur} \\ \text{la sphère unité } S \end{array}$$

Dans le cas d'un milieu poreux isotrope ces relations se simplifient pour donner :

$$(VI,8) \quad \boxed{\begin{array}{l} E(2\lambda) = -\pi C'(0) \\ E(\sigma) = -4 C'(0) \end{array}}$$

La covariance donne ainsi accès au périmètre et à la surface spécifiques.

Numériquement on peut calculer $C'(0)$ par interpolation parabolique sur les trois premiers points de la courbe :

(VI, 9)

$$C'(0) = \frac{C(x_1) - C(x_0)}{x_1 - x_0} + \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{C(x_2) - C(x_0)}{x_2 - x_0}$$



Comme pour toute dérivation de courbe expérimentale il ne faut pas s'attendre à une grande précision sur $C'(0)$. En prenant pour estimateur la pente de la droite joignant les deux premiers points de la courbe on peut trouver un $-C'(0)$ notablement plus faible. L'interpolation parabolique nous paraît mieux justifiée, mais ce qui importe avant tout c'est de choisir une méthode de calcul et de s'y tenir.

Comparaison avec la méthode B.E.T. (Brunauer, Emmet et Teller)

Comme pour la porosité il est intéressant de comparer l'estimation de la surface spécifique en plaques minces avec sa mesure pétrophysique.

La méthode B.E.T. déduit la surface spécifique de la quantité d'un gaz inerte (azote) adsorbé par l'échantillon maintenu à la température de l'azote liquide. L'ordre de grandeur des pores atteints est de 10 Å°.

La méthode B.E.T. n'est pas utilisée pour les mesures de routine car elle est très longue à mettre en oeuvre : il faut attendre deux à trois jours pour que l'équilibre entre le gaz libre et adsorbé soit atteint.

Voici les surfaces spécifiques déterminées à l'A.T. et, pour 4 échantillons, par la méthode B.E.T.

SURFACES SPECIFIQUES (en m²/G)

PUITS	AT ₁	AT ₂	B.E.T.
DELF 01	0,0035	0,0039	0,056
DELF 02	0,0094	0,0053	0,58
DELF 03	0,0044	0,0073	
DELF 04	0,0029	0,0024	
DELF 05	0,0036	0,0088	
DELF 07	0,0102	0,0101	
DELF 08	0,0107	0,0089	0,75
DELF 11	0,0102	0,0133	0,42
DELF 12	0,0027	0,0044	
DELF 14	0,0022	0,0033	
DELF 18	0,0030	0,0033	
DELF 19	0,0004	0,0005	
DELF 20	0,0015	0,0022	

Hormis le cas de DELF 5 qui se distinguait aussi pour la porosité les deux mesures AT₁ et AT₂ diffèrent au plus d'un rapport 1,8. Les valeurs B.E.T. sont quant à elles de 10 à 100 fois supérieures aux résultats de l'A.T.

	$\frac{\sigma_{B.E.T.}}{\sigma_{AT_1}}$	$\frac{\sigma_{B.E.T.}}{\sigma_{AT_2}}$
DELF 01	16,5	14
DELF 02	62	109
DELF 08	70	84
DELF 11	41	32

Il ne faut pas s'en étonner car le rayon de coupure, en passant de 1μ à 10 Å°, est devenu 1.000 fois plus petit. Avec davantage de données numériques il serait d'ailleurs intéressant de tester une relation de la forme $\sigma = \frac{k}{r^\alpha}$ avec $1/3 < \alpha < 2/3$.

De même avec 13 échantillons on ne peut parler sérieusement de corrélation entre porosité et surface spécifique, mais il est tentant de voir si une tendance se manifeste. Le graphique 2 ne montre rien de tel.

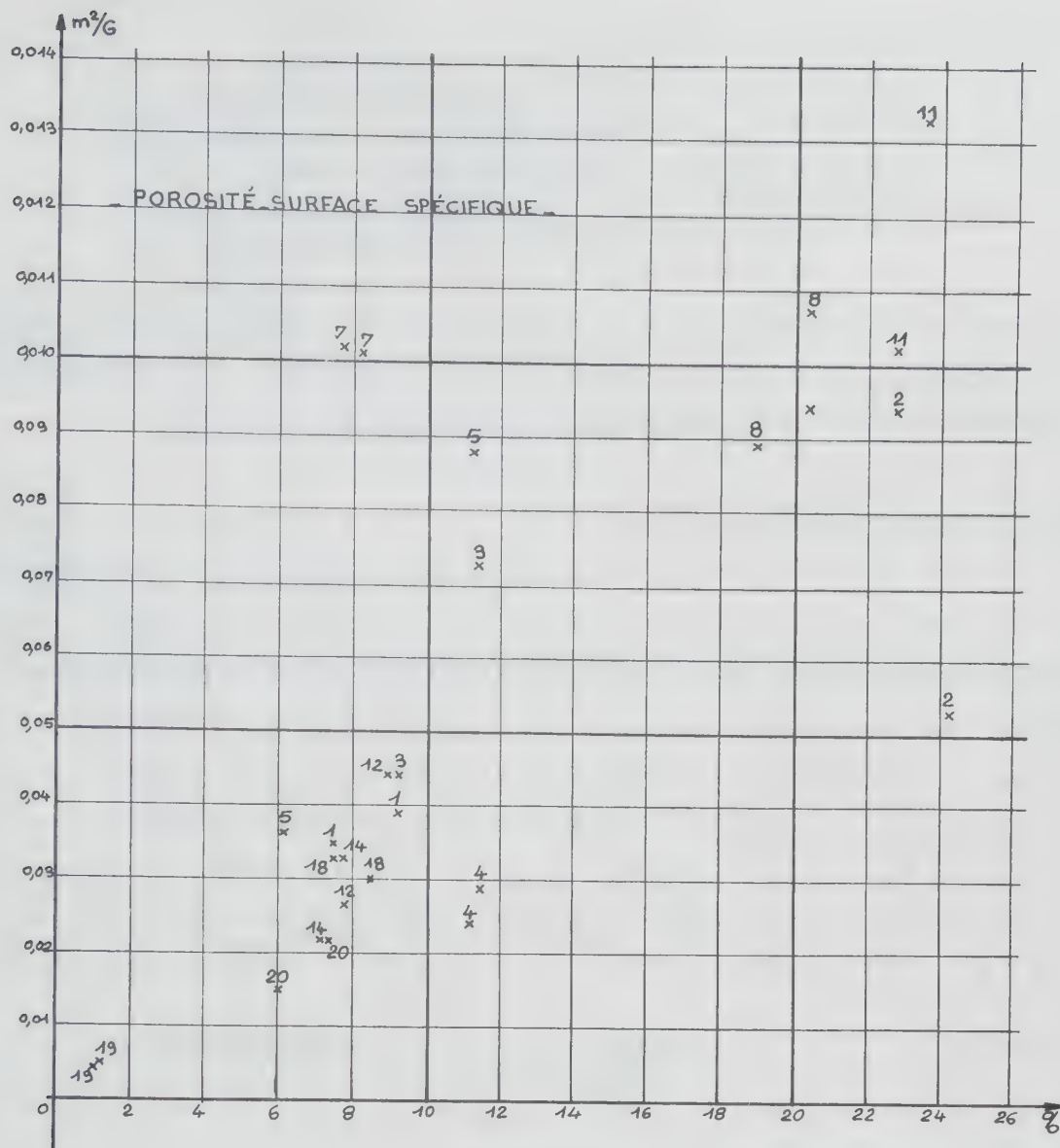


Fig. 2

3 - Surface spécifique de contact

L'interprétation morphologique de la dérivée à l'origine de la covariance s'étend aux covariances croisées. Les $C'_{ls}(0)$ donnent accès aux surfaces spécifiques de contact entre les constituants l et s.

Considérons par exemple les pores (indice 0), les grains (indice 1) et l'argile (indice 2).

La relation :

$$C_{00}(h) + C_{01}(h) + C_{02}(h) = p_0$$

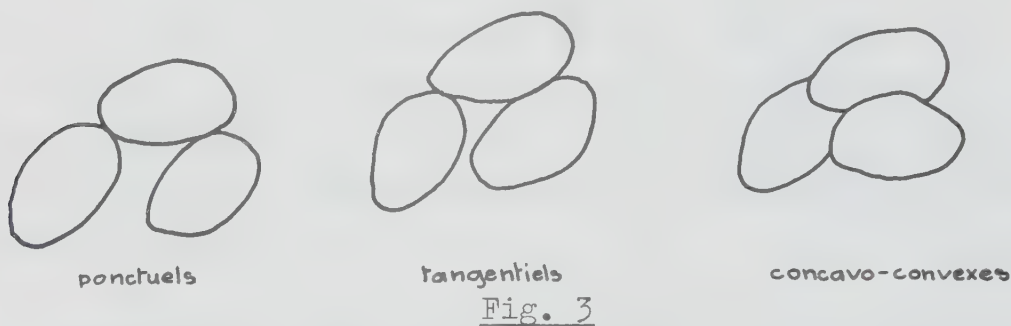
donne par dérivation

$$\underbrace{- 4 C'_{00}(0)}_{\text{surface limite des pores}} = \underbrace{4 C'_{01}(0)}_{\text{surface de contact pores-grains}} + \underbrace{4 C'_{02}(0)}_{\text{surface de contact pores-argile}}$$

On peut espérer appliquer ces résultats à l'étude de la comparaison des grains, problème soulevé par M. BYRAMJEE et à l'exploitation de la méthode de coloration à deux résines de M. ETIENNE.

a) Compaction des grains

Sous l'influence du poids des couches supérieures et de la dissolution en milieu aqueux les contacts entre grains évoluent du type "contacts ponctuels" au type "contacts tangentiels" puis "concavo-convexes".



Comment caractériser cette compaction ?

Un paramètre valable serait la surface spécifique de contact des grains entre eux.

Mais si l'on n'y prend garde cette notion n'a pas de sens. On touche là une difficulté qui a été rencontrée, en d'autres circonstances dans l'application de la formule de KOZENY-CARMAN. Travaillant sur des milieux sableux non consolidés les expérimentateurs ont noté une différence importante entre la surface totale des grains de sable et leur surface externe une fois mis en place. L'explication est que la frontière de deux grains n'est pas la réunion des frontières de chacun d'eux : certains points de la frontière, caractérisés par le fait que toute boule centrée sur eux avait une intersection non vide à la fois avec les grains et leur complémentaire perdent cette propriété quand les grains entrent en contact.

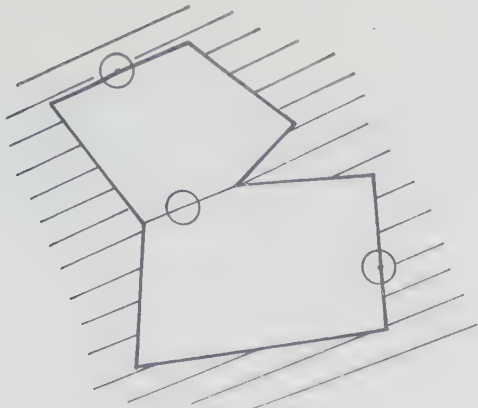


Fig. 4

C'est la conséquence du procédé d'identification des constituants basé sur leur différenciation optique. Pour l'A.T. les grains ne sont qu'une seule et unique phase de teinte donnée.

Les surfaces de contacts entre grains ne pourront être mesurées que si leur existence se manifeste par une ligne de séparation suffisamment épaisse, que les seuils affecteront aux pores. Dans ce cas on pourra procéder en deux temps :

- mesure de la surface spécifique des grains sur l'image originale.
- fermeture des grains qui élimine les lignes de contact puis mesure de la surface spécifique, on obtient de la sorte la surface spécifique externe des grains (contacts grain-non grain).

La différence des deux valeurs donne la surface spécifique de contact cherchée.

La mise en pratique de ces idées bute encore sur des difficultés de visualisation.

b) Surfaces de contact eau - huile - roche

La méthode à deux résines permettrait théoriquement de mesurer les diverses surfaces de contact entre l'eau, l'huile et la roche. Comme actuellement la visualisation simultanée des deux résines en fluorescence n'est pas possible on procède par différence.

Le plug étudié est fractionné en deux échantillons tous deux imprégnés de résine rouge fluorescente. Le premier est laissé tel quel et permet de visualiser la porosité totale. Le second subit une désorption partielle par une centrifugation calculée de manière à libérer tous les pores interconnectés par des canaux de diamètre supérieur au micron, pour les remplir ensuite par de la résine bleue (porosité utile). Le résidu de résine rouge, le seul observable par fluorescence, est censé représenter la différence porosité totale - porosité utile, c'est-à-dire le volume occupé par l'eau.

Dans cette hypothèse la première surface spécifique soit σ_T (T pour "totale") concerne les contacts entre la roche et les autres constituants et la seconde σ_R (R pour "résiduelle") les contacts entre l'eau et les autres constituants :

$$\sigma_T = \text{roche.eau} + \text{roche.huile}$$

$$\sigma_R = \text{eau.roche} + \text{eau.huile}$$

Par différence :

$$\sigma_T - \sigma_R = \text{huile.roche} - \text{huile-eau}$$

Selon les interprétations classiques la roche serait toujours recouverte d'une pellicule d'eau, par conséquent la surface de contact huile.roche toujours nulle et $\sigma_T - \sigma_R$ serait négatif. En réalité comme le soulignent M.M. ETIENNE et LE FOURNIER [29] : "l'épaisseur du film d'eau continu à envisager sur les parois des pores pour des pressions capillaires notables serait si faible qu'il passerait forcément inaperçu à l'examen optique, aux grossissements habituels, et ne représenterait qu'une fraction de volume des pores tout à fait négligeable. De fait, un tel film n'est pas visible sur les préparation." Les résultats des mesures à l'analyseur de textures confirment ce point.

	POROSITE TOTALE	POROSITE RESIDUELLE	POROSITE UTILE et $\sigma_T - \sigma_R$	EFFET D'INJECTION
DELF 2	22,5 % $\sigma_T = 0,0073 \text{ m}^2/\text{G}$	0,8 % $\sigma_R = 0,0007 \text{ m}^2/\text{G}$	21,7 % $0,0066 \text{ m}^2/\text{G}$	2 %
DELF 3	11,4 % $\sigma_T = 0,0073 \text{ m}^2/\text{G}$	4 % $\sigma_R = 0,0035 \text{ m}^2/\text{G}$	7,4 % $0,0038 \text{ m}^2/\text{G}$	1,6 %
DELF 5	11,2 % $\sigma_T = 0,0088 \text{ m}^2/\text{G}$	3,9 % $\sigma_R = 0,0032 \text{ m}^2/\text{G}$	7,3 % $0,0056 \text{ m}^2/\text{G}$	2,6 %
DELF 7	16,9 % $\sigma_T = 0,0106 \text{ m}^2/\text{G}$	7,3 % $\sigma_R = 0,0085 \text{ m}^2/\text{G}$	9,6 % $0,0021 \text{ m}^2/\text{G}$	7,6 %
DELF 12	8,9 % $\sigma_T = 0,0046 \text{ m}^2/\text{G}$	AUCUNE RESINE BLEUE	0	8,9 %

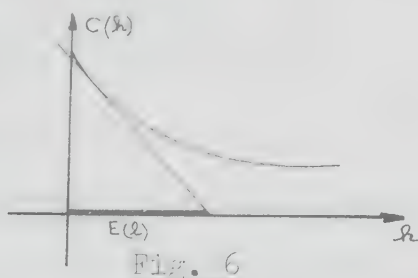
TABLEAU 5

Dans la dernière colonne du tableau 5 figurent les effets d'injections. Compte tenu de toutes les incertitudes sur les hypothèses et les mesures on peut dire qu'ils sont comparables aux porosités résiduelles. Ceci s'explique : Les lois qui régissent l'envahissement de l'air dans la résine sont analogues à celles qui gouvernent la pénétration du mercure lors de l'injection Purcell. Comme le rayon de courbure de l'interface résine bleue - résine rouge est de l'ordre du demi-micron c'est-à-dire environ le même que le rayon de coupure imposé par l'analyseur de textures il faut s'attendre à ce que cette résine rouge résiduelle matérialise à peu près l'effet d'injection.

4 - Traversée moyenne

Pour mémoire rappelons que le rapport $\frac{C(0)}{-C'(0)}$ est égal à la traversée moyenne des pores, comptée "en nombre" c'est-à-dire proportionnellement au contour apparent dans la direction de mesure.

Graphiquement la traversée moyenne $E(L)$ est la sous-tangente à l'origine, sur l'axe des h .



Cette question de traversées moyennes sera reprise à propos des granulométries.

II - PROPRIETES A L'INFINI : LA PORTEE

1 - Portée géostatistique : taille de la zone d'influence

Dans un milieu ergodique les corrélations entre les variables aléatoires ponctuelles $k(x)$ et $k(x+h)$ s'éteignent aux grandes distances h , et :

$$C(h) = E[k(x) k(x+h)] \rightarrow E[k(x)]^2 = C(0)^2$$

La covariance tend vers un palier d'ordonnée $C(0)^2$.

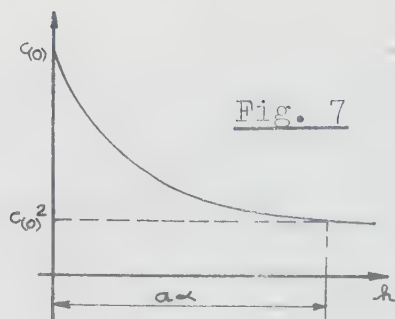


Fig. 7

On appelle "portée", au sens géostatistique, la distance a_α où la covariance atteint pratiquement son palier et y demeure de manière stable.

Pour plus de précision dans les calculs on pourra convenir que le palier est atteint quand le coefficient d'auto-corrélation :

$$\rho(h) = \frac{C(h) - C^2(0)}{C(0)[1 - C(0)]}$$

devient et reste inférieur par exemple à 2 %.

Quand cela est possible on s'arrange expérimentalement pour choisir un grandissement tel que le palier soit atteint dans le champ.

Physiquement la portée chiffre l'extension de la zone d'influence du phénomène, la taille de la structure apparente à l'échelle d'observation considérée. Si une covariance mesurée par moyenne sur plusieurs plages atteint son palier c'est qu'une première structure a épuisé son action à l'échelle de la plage.

2 - Portées - intégrales : échantillon statistiquement équivalent

Une notion différente quoique voisine de la portée est l'expression

$$(VI, 10) \quad a_1 = \frac{2}{pq} \int_0^\infty [C(h) - q^2] dh \quad \begin{cases} C(0) = q \\ p = 1 - q \end{cases}$$

Cette portée, si elle existe, est toujours positive ou nulle en vertu du théorème de BOCHNER. On remarque que c'est l'intégrale du coefficient d'auto-corrélation. La considération de l'homogénéité montre que a_1 a la signification géométrique d'une longueur.

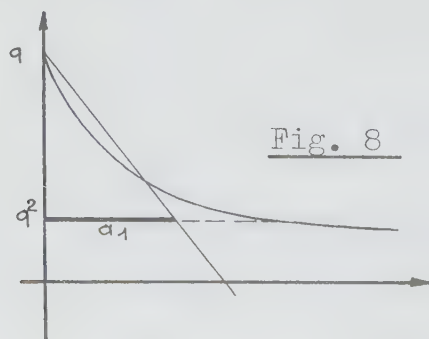


Fig. 8

Graphiquement on peut la représenter comme l'un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle dont l'autre est pq et l'aire $\int_0^\infty [C(h) - q^2] dh$

La portée-intégrale est donc inférieure à la portée géostatistique.

totique de la variance : si l'on veut estimer la porosité en prenant la valeur moyenne de $k(x)$ sur un segment de longueur l et de direction α , soit :

$$q^* = \frac{1}{l} \int_0^l k(x) dx$$

la partie principale de la variance de q^* , lorsque l devient très grand est :

(VI,11)

$$D^2(q^*) = \frac{a_1 pq}{1}$$

(VI,11), s'écrit également :

$$D^2(q^*) = \frac{pq}{\frac{1}{a_1}}$$

L'échantillon de longueur l est statistiquement équivalent à $n = \frac{l}{a_1}$ échantillons indépendants de longueur a_1 . Une portée a_1 élevée indique que le milieu n'apparaît comme statistiquement homogène que sur de grandes distances. Un test plus précis permet de comparer a_1 aux dimensions granulométriques des pores (cf. chap. VIII).

De façon analogue on définit les portées-intégrales à 2 et 3 dimensions :

(VI,12)

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{pq} \int_{R^2} (C(r) - q^2) dr \\ a_3 &= \frac{1}{pq} \int_{R^3} (C(r) - q^2) dr \end{aligned}$$

Ces coefficients s'introduisent d'eux mêmes dans les calculs d'estimation aux "grandes mailles".

Le tableau 9 consigne les différentes portées trouvées sur les lames DELF.

	portée géostatistique	portée-1 μ	portée-2 $10^2 \mu^2$	portée-3 $10^4 \mu^3$
DELF 01	150	81	157	548
DELF 02	120	75	78,6	87
DELF 03	330	75	200	914
DELF 04	500	126	343	1.574
DELF 05	500	99	291	1.281
DELF 07	> 200	39	32	38
DELF 08	200	64	76	117
DELF 11	> 220	> 78	> 113	> 182
DELF 12	500	118	386	1.990
DELF 14	> 700	> 277	> 1.514	> 9.377
DELF 18	700	208	971	5.718
DELF 19	250	112	266	1.109
DELF 20	270	154	603	4.078

Tableau 9

Ces paramètres géométriques nouveaux n'évoquent pas grand chose à l'intuition immédiate. Grandeurs moyennes à caractère statistique les portées ne sont pas matérialisables localement dans le réseau poreux. Pourtant lorsqu'on examine au microscope, à grossissement fixe, les divers échantillons, on se rend bien compte du degré d'homogénéisation du milieu poreux à cette échelle, du recul qu'on a par rapport à l'image. Disons que les portées traduisent numériquement cette impression. Elles caractérisent la longueur, la surface ou le volume d'un "motif poreux" qui se répèterait statistiquement analogue à lui-même. Statistiquement seulement car en tant qu'individu particulier ce "motif poreux" n'a pas une existence réelle.

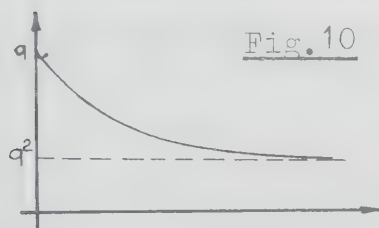
IV - PROPRIETES GLOBALES : ORGANISATION SPATIALE ET IMBRICATION DES STRUCTURES

Le comportement à l'origine et à l'infini de la covariance ne sont que des éléments particuliers. C'est en vérité toute la courbe qui révèle l'organisation spatiale du milieu. Elle peut présenter des remontées indiquant l'existence de fréquences privilégiées correspondant à des périodicités (équi-espacements, groupements par paquets, etc...), ou au contraire décroître régulièrement vers son palier, ce qui dénote un faible degré de structuration. La covariance peut aussi descendre sous son palier et montrer ainsi des corrélations négatives : "effet de trou". Elle peut encore ne pas atteindre de palier ou en atteindre plusieurs successivement : "structures gigognes". [19]

L'interprétation des covariances n'obit à aucune règle générale, mais l'expérience a permis de dégager certains points de repère.

1 - Structuration peu marquée : schémas booléens

Sur la série DELF la plupart des covariances ponctuelles des pores ont, à l'échelle des plages (700 μ à 2 mm) une allure exponentielle.



$$C(h) = pq e^{-\lambda h} + q^2$$

Mais l'ajustement précis de la covariance centrée $C(h) - q^2$ sur papier log-arithmétique montre que sa forme mathématique peut n'être pas exactement exponentielle mais seulement s'en rapprocher.

Pour interpréter intuitivement cette forme de covariance on peut avoir recours à une famille de fonctions aléatoires dont les covariances présentent le même aspect : les schémas booléens. Bien entendu cette interprétation n'a rien de nécessaire puisque la covariance ne détermine pas la fonction aléatoire.

a - Rappel de la notion de schéma booléen

On considère un processus de Poisson dans R^n , c'est-à-dire un ensemble de points répartis de manière telle que :

- . si V et V' sont deux domaines disjoints de R^n $N(V)$ et $N(V')$, nombre de points contenus dans V et V' sont des variables aléatoires indépendantes.
- . $N(V)$ suit une loi de Poisson de paramètre θV .

Les points de Poisson réalisent la notion intuitive de "points au hasard".

En chacun de ces points x on fait maintenant "germer" un ensemble aléatoire A' , dit grain primaire, autrement dit un ensemble aléatoire (non stationnaire) est implanté en x . Puis on considère la réunion ensembliste de tous les A_x qu'on nomme les grains. On obtient ainsi un milieu à deux composantes.

On montre [1] que si θ est la densité des points de Poisson le moment fonctionnel relatif aux pores a pour expression :

$$(VI,13) \quad Q(B) = e^{-\theta E[\text{Mes}(A' \oplus \check{B})]}$$

La fig.(1 ch.II) montre une simulation d'un schéma booléen dont les grains primaires sont des cercles.

Dans le cas particulier où B est constitué de deux points distants de h $Q(B) = Q(x, x+h)$ est une covariance. Elle s'exprime en fonction du covariogramme géométrique du grain primaire A' soit $K(h) = E[\text{Mes}(A \cap A-h)]$.

En effet $\text{Mes}(A' \oplus \check{B}) = \text{Mes}(A \cup A-h) = \text{Mes}(A) + \text{Mes}(A-h) - \text{Mes}(A \cap A-h)$ d'où en passant aux espérances :

$$E[\text{Mes}(A' \oplus \check{B})] = 2 K(0) - K(h)$$

Donc :

$$(IV,14) \quad C(h) = q^2 e^{\theta K(h)} = q e^{-\theta [K(0) - K(h)]}$$

avec $q = e^{-\theta K(0)}$

Un schéma booléen particulier semble s'adapter à la réalité de certains milieux poreux : celui dont les grains primaires sont des polygones ou polyèdres poissonniens. (domaines convexes limités par des droites ou plans induisant aux points de Poisson)

L'expression analytique de la covariance est alors :

$$(VI,15) \quad c(h) = q^2 e^{\theta} e^{-\lambda |h|} = e^{-\theta[2 - e^{-\lambda |h|}]}$$

Le paramètre θ est lié à la porosité puisque $\theta = \text{Log } \frac{1}{q}$

λ est un facteur d'échelle : $\frac{1}{\lambda}$ est homogène à une longueur. Plus précisément : $\frac{1}{\lambda} = \theta \bar{L}_0$ où $\bar{L}_0$ désigne la traversée moyenne en nombre des pores.

On peut tester ce schéma sur un papier log-log-arithmétique construit spécialement à cet effet (cf. exemple numérique du Chapitre VII).

b - Remarque : Ensembles aléatoires indéfiniment divisibles et genèse de la porosité

Avant de passer à d'autres types de covariance, nous voudrions montrer comment on peut concevoir que les schémas booléens se rattachent à la genèse de l'espace poreux. Il ne faudra surtout pas voir dans ce qui va suivre une explication ni même une description de la réalité physique. Celle-ci est extrêmement complexe, mal connue et impossible à formaliser mathématiquement dans l'état actuel.

La constitution d'une roche sédimentaire a lieu en deux phases :

- Une phase de dépôt, au terme de laquelle est créée la porosité primaire.
- Une phase de diagénèse, terme générique controversé, désignant un ensemble de transformations du dépôt telles que la compaction, la cimentation, la dissolution, etc...

Ces diverses transformations, quand elles ont lieu, prennent une importance variable suivant les cas, et en particulier suivant qu'il s'agit de grès ou de carbonates. Pour les grès interviennent principalement la compaction et la cimentation ; pour les carbonates, comme le montre le récent article de Philip W. CHOQUETTE et LLOYD C. PRAY [27] la diagénèse est plus complexe et déterminante : la porosité primaire est pratiquement complètement modifiée par dissolution et cimentation.

Quoi qu'il en soit le trait dominant de l'évolution de la porosité est son oblitération.

porosité primaire des grès usuels	25 à 40 %	porosité finale	15 à 30 %
porosité primaire des carbonates	40 à 70 %	porosité finale	5 à 15 %

cf. [27]

On peut se représenter les choses de la manière suivante : à la fin du dépôt initial les sédiments constituent un milieu à deux composantes que nous nommerons comme de coutume les grains et les pores. Soient A_1 les grains et A_1^c les pores.

Un premier processus d'oblitération va consister en un apport de matière (de grain) soit A_2 et les grains du milieu ainsi modifié seront $A_1 \cup A_2$. Au bout de n opérations analogues le dépôt sera constitué de :

$$\begin{aligned} \text{grains} &: A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \\ \text{pores} &: A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c \end{aligned}$$

Dans la réalité, bien sûr, on ne connaît ni le nombre ni la loi des apports A_i .

Or il se trouve que formellement l'ensemble aléatoire engendré par un schéma booléen est analogue aux "grains" du dépôt, c'est-à-dire à l'union des apports. En effet G. MATHERON a montré [17] que l'ensemble aléatoire du schéma booléen possède la propriété fondamentale d'être indéfiniment divisible pour la réunion. Autrement dit pour tout n il existe des ensembles aléatoires A_i , indépendants et de même loi tels que :

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Il est clair que le parallélisme n'est pas total puisque les apports ne sont certainement ni indépendants ni de même loi. Néanmoins l'analogie est peut être assez forte pour expliquer dans certains cas l'aspect pseudo-exponentiel des courbes de porosité.

2 - Effet de trou

Il y a effet de trou quand la covariance descend en dessous de son palier, autrement dit quand $C(h) - q^2$ prend des valeurs négatives. Ce phénomène indique un effet compensateur : la probabilité conditionnelle que $x+h$ appartienne aux grains alors que x appartient aux pores est supérieure à p , probabilité a priori qu'un point appartienne aux grains. En effet :

$$C_{00}(h) + C_{01}(h) = q$$

$$\{x \text{ et } x+h \in \text{pores}\} \left\{ \begin{array}{l} x \in \text{pores} \\ x+h \in \text{pores} \end{array} \right\}$$

$$\text{Prob } \{x+h \in \text{grains} / x \in \text{pores}\} = \frac{C_{01}(h)}{q} = 1 - \frac{C_{00}(h)}{q}$$

Or dans le domaine où la covariance centrée est négative :

$$\{h : C_{00}(h) - q^2 < 0\} \text{ on a } \frac{C_{00}(h)}{q} < q \text{ donc } \frac{C_{01}(h)}{q} > p.$$

Un effet de trou notable a été observé par J. SERRA en étudiant la migration de la calcite dans le gisement de fer lorrain [réf.20].

L'effet de trou peut se reconstruire dans des empilements de sphères que deux points des pores ne peuvent enjamber que pour des distances privilégiées.

La figure 11 montre une simulation de remplissage de l'espace au moyen de cercles impénétrables de même rayon. Le procédé de construction en est très simple : on tire successivement les centres des cercles dans un processus de Poisson dans le plan et un nouveau cercle n'est implanté effectivement que s'il n'empiète pas sur les autres. L'opération se poursuit jusqu'à obtenir le remplissage le plus dense possible d'un domaine fixé.

La covariance expérimentale est la suivante.

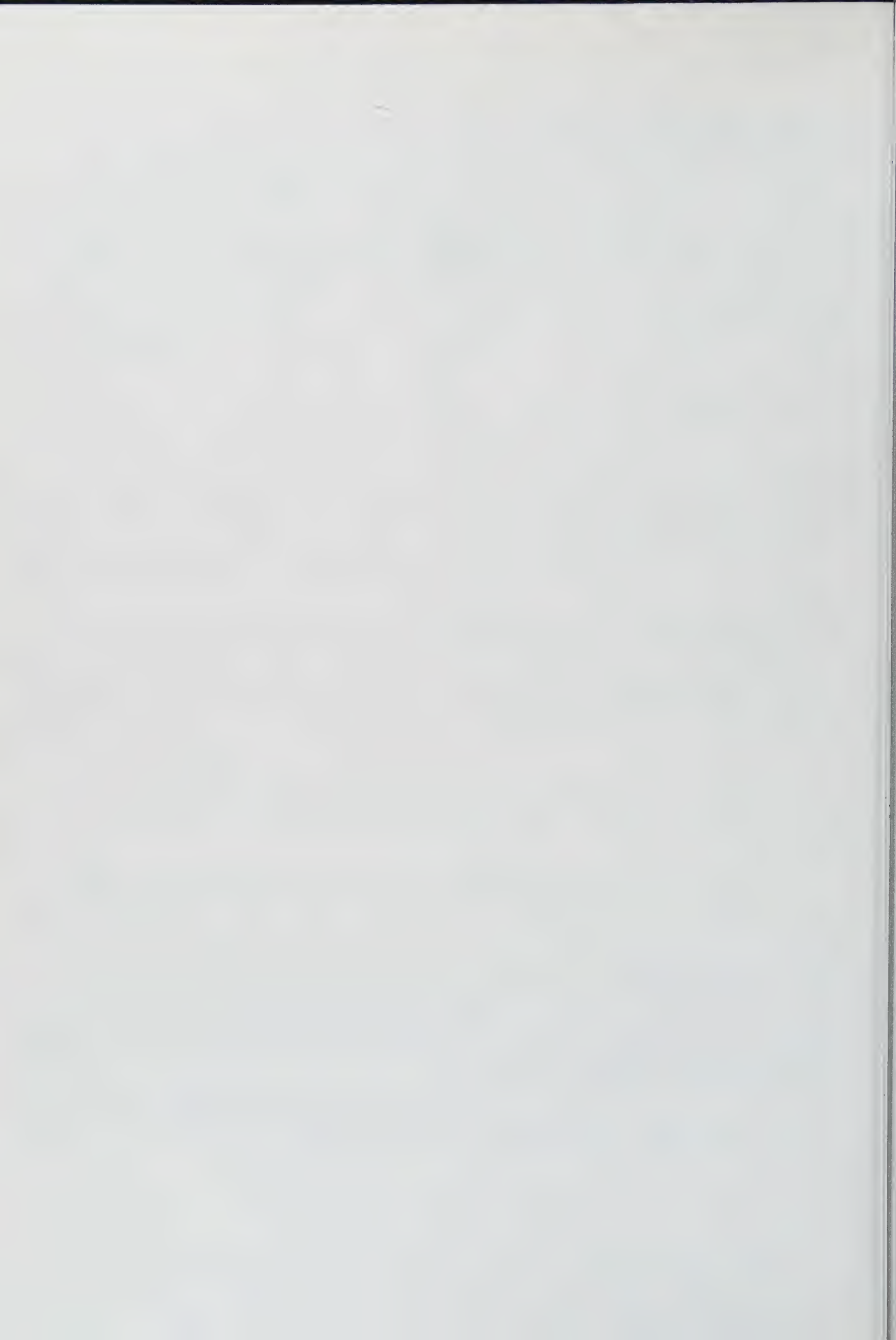
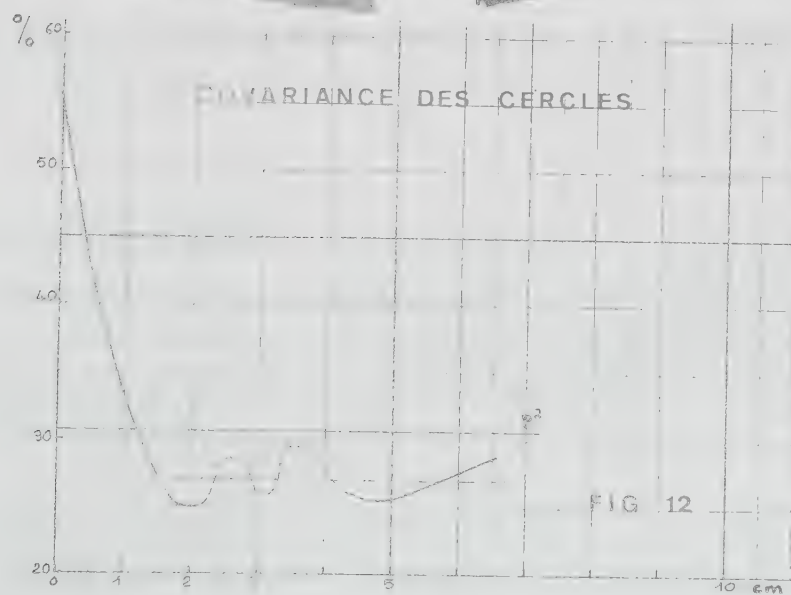
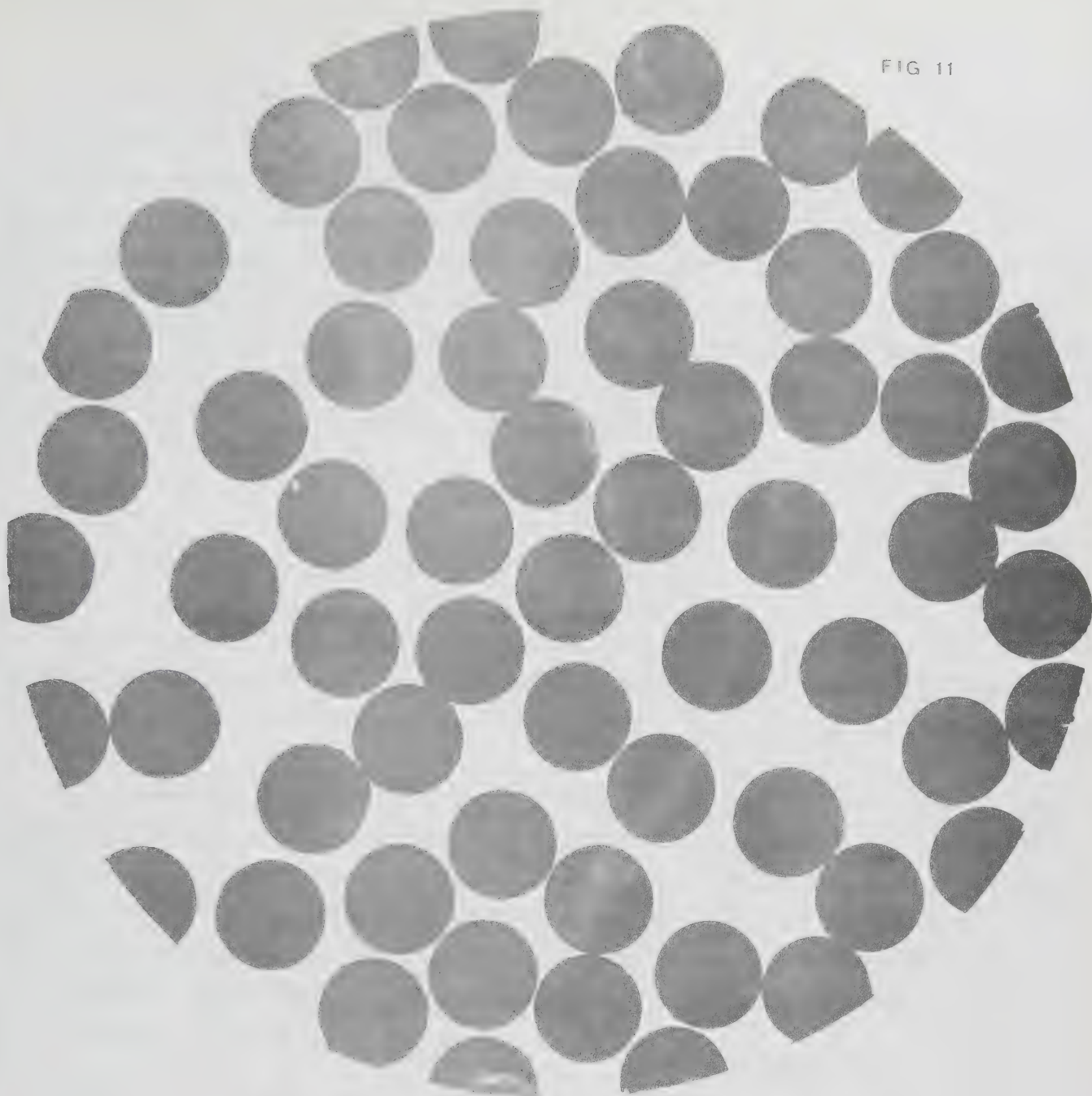


FIG 11





L'effet de trou est net et maximum pour $h = 2R$ ce qui se conçoit : l'intersection d'un cercle avec lui-même translaté de $2R$ est vide. Cependant le palier semble un peu trop élevé ; un géostatisticien, qui ignorerait avoir affaire à une fonction en tout ou rien, l'aurait placé par exemple comme il figure en pointillés. Nous touchons là un problème d'inférence statistique : si l'on ne possède qu'une seule réalisation la teneur expérimentale q^* est un estimateur sans biais de q : $E(q^*) = q$. En revanche l'espérance de q^{*2} n'est pas q^2 mais est surestimée de la variance de q^* dans le champ total infini :

$$E[q^{*2}] = q^2 + D^2(q^*)$$

Le palier réel est donc en dessous de q^2 .

Dans le cas de l'étude des lames minces le problème est moins grave car on considère plusieurs plages et le palier est pris égal au carré de la teneur moyenne.

Une remarque accessoire sur la covariance Fig. 12 est que l'impénétrabilité des cercles crée des contraintes géométriques qui se prolongent sur d'assez longues distances. Ceci rejoint les observations effectuées à l'occasion de recherches sur l'état liquide où l'on a remarqué qu'une perturbation locale apportée à un réseau régulier (empilement hexagonal par exemple) ne parvient pratiquement jamais à s'éteindre tout à fait. [10]

Pour les milieux poreux on peut s'attendre à un effet de trou dans le cas de pores à allure intergranulaire, formant d'apparence un réseau.

3 - Imbrication de structures

Les phénomènes géologiques apparaissent comme une imbrication de structures : organisation à l'échelle pétrographique, feuillets, strates, empilement de strates, etc... La covariance ou le variogramme révèlent les niveaux d'hétérogénéité.

J. SERRA [19] a pu mettre en évidence dans la couche grise du gisement de fer lorrain jusqu'à 7 transitions différences, dans une gamme allant de la centaine de microns à la dizaine de kilomètres.

Dans le domaine pétrolier J.M. FONCK [11] a exhibé grâce à sa méthode originale des "variogrammes glissants" 3 niveaux d'hétérogénéité dans le réservoir d'Hassi-Messaoud : des contrastes granulométriques rapides à l'échelle centimétrique - ou décimétrique, des cycles métriques puis des tendances décamétriques.

Technologiquement, si l'on veut couvrir un intervalle de distance assez grand, le support de la variable régionalisée ne pourra rester le même. Pour la porosité le support peut être ponctuel à l'observation pétrographique (distances maximales de l'ordre du mm) mais au niveau de la lame mince il faut déjà prendre comme variable la porosité des plages. Pour l'échelle métrique le support sera le plug lui-même. En règle générale la taille du support doit être faible à l'échelle où l'on se place.

La théorie montre qu'à partir de la covariance ponctuelle il est possible de déduire celle de toute régularisée au moyen de la relation :

$$(VI,16) \quad C_p(h) = C * \check{P} = \int C(h+u)P(u)du$$

où P est le covariogramme transitif de la fonction régularisante p

$$P(u) = p * p(u) = \int p(u+x)p(x)dx$$

En pratique si l'on ne connaît que la covariance régularisée C_p il ne faut pas s'efforcer de la déconvoluer mais plutôt chercher un modèle de covariance ponctuelle qui par une convolution directe redonne à peu près C_p . Ces calculs sont du domaine classique de la géostatistique.

Exemple de raccordement d'échelle

Sur DELF 02 la covariance ponctuelle a été mesurée à l'aide de 324 plages contigües parant la lame. La teneur de chacune des plages a été notée ce qui permet le calcul de la covariance (ou du variogramme *) des plages avec une bonne précision.

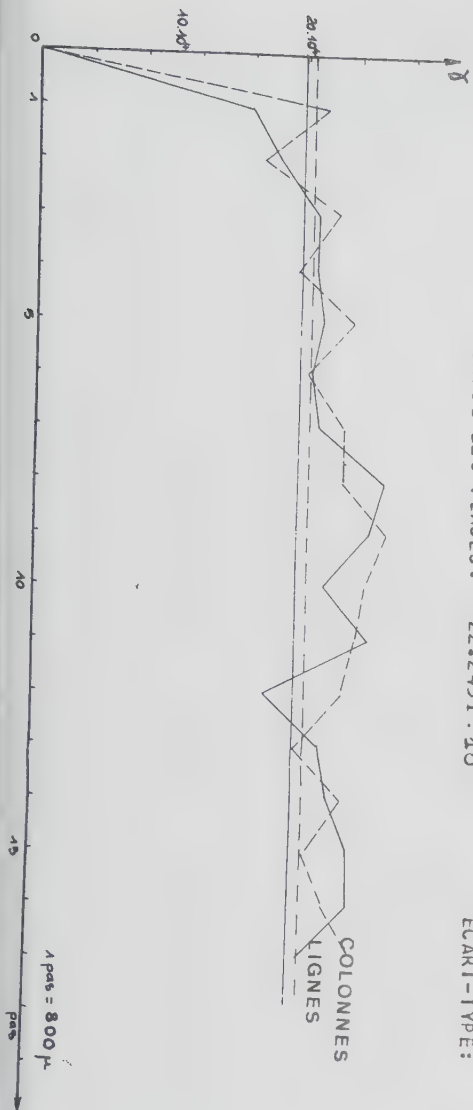
* Voir sa définition au début du chapitre suivant.

POROSITE DES PLAGES DE DELF 2

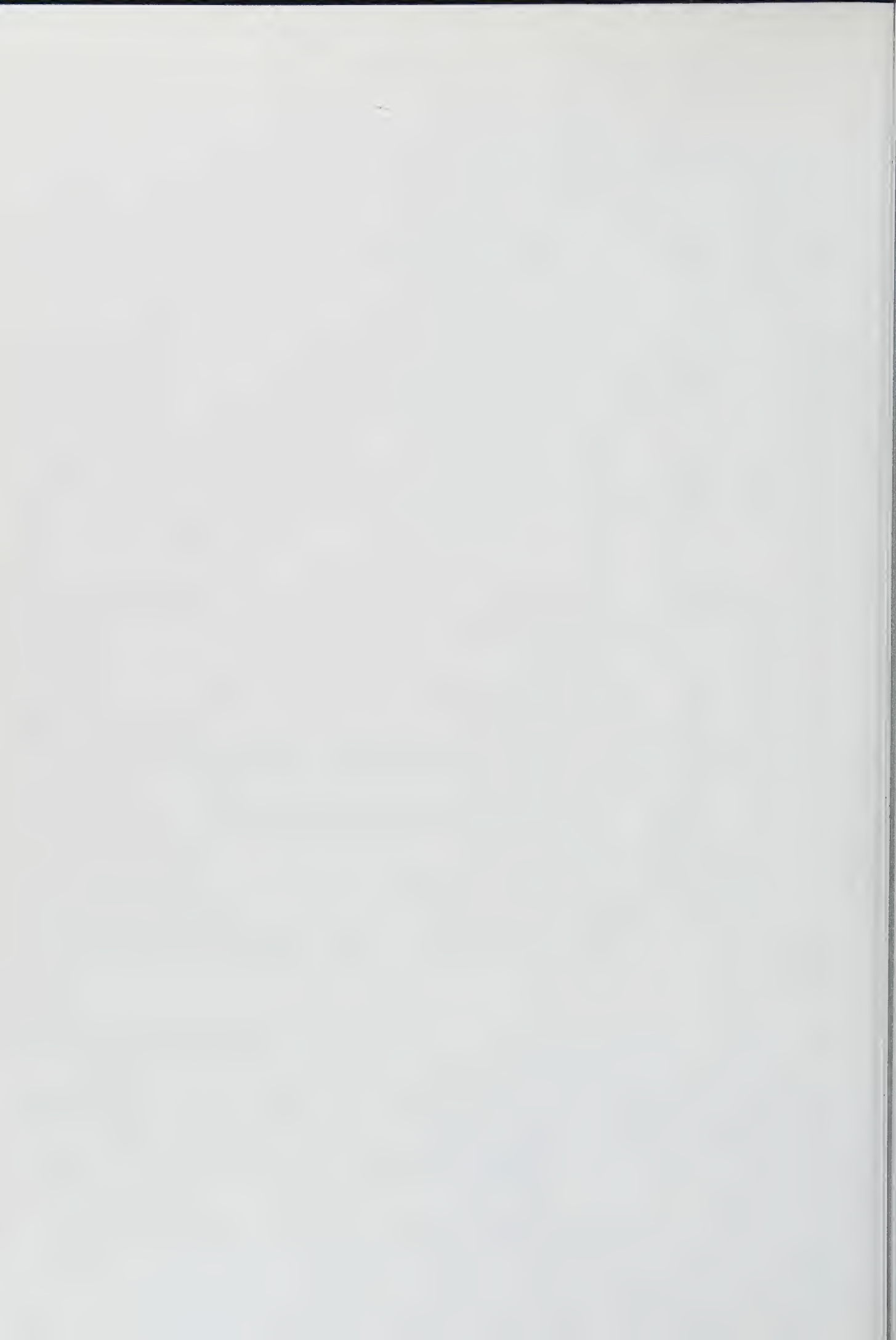
20.81	20.42	24.43	25.67	26.65	21.22	18.17	21.14	27.43	19.46	20.57	8.77	7.53	15.15	24.11	28.58	29.83	23.88
19.37	13.94	21.62	20.02	11.53	6.81	18.46	19.38	23.27	29.30	25.06	22.40	29.84	25.10	21.57	29.11	26.57	17.72
20.92	23.60	18.81	16.25	25.20	20.13	22.33	20.91	24.68	26.30	20.75	22.14	19.20	19.54	20.80	13.94	20.41	19.26
28.45	22.01	24.70	15.90	25.34	21.50	25.01	28.23	23.91	35.63	33.76	21.58	21.27	24.37	23.55	16.43	25.33	20.10
22.82	22.29	16.97	26.87	27.28	19.51	25.37	28.08	15.49	17.23	24.70	29.04	22.93	31.76	18.63	22.29	27.55	29.51
22.32	25.64	21.35	24.68	21.39	21.75	21.59	31.30	33.57	21.99	22.78	25.95	26.10	26.39	37.22	27.03	15.09	18.41
20.56	19.89	24.44	29.59	25.34	32.10	22.48	23.12	23.34	24.15	27.42	18.49	28.17	21.36	21.46	29.95	26.31	33.14
21.93	23.48	22.76	24.40	22.16	30.37	26.43	28.07	28.11	30.80	25.72	28.99	25.85	26.76	18.87	25.18	22.15	26.74
16.02	16.03	21.03	23.85	26.17	21.93	15.83	19.06	27.46	24.77	36.22	24.12	23.55	25.51	32.85	24.38	32.79	26.88
27.69	28.24	25.09	25.46	22.84	24.30	28.69	20.51	24.72	19.63	24.34	24.34	26.21	23.33	16.53	21.50	16.46	22.32
13.60	21.14	17.65	23.04	21.69	23.70	17.89	24.50	18.42	16.51	23.18	30.37	22.86	19.47	24.53	17.45	25.35	25.95
23.00	23.73	15.96	29.90	5.34	26.86	29.14	33.63	26.94	22.04	22.30	25.44	21.48	26.35	13.96	26.38	17.60	23.71
14.96	20.84	20.50	22.79	22.88	26.51	25.65	24.79	24.84	23.54	21.98	23.22	25.66	21.05	21.53	23.77	25.04	23.28
20.75	26.08	21.19	18.45	20.37	23.08	27.01	23.39	21.47	19.91	26.44	19.10	22.02	22.16	15.31	23.14	16.10	23.65
13.58	20.66	19.65	17.78	20.43	24.15	23.55	27.11	29.41	24.72	18.91	26.53	24.48	21.95	23.15	25.51	24.52	21.41
21.30	27.13	25.13	15.37	15.48	24.01	29.95	21.96	21.70	20.58	26.63	18.37	16.28	23.87	21.37	14.45	19.19	20.32
19.36	22.50	22.22	6.63	15.12	18.72	27.77	22.45	20.15	26.20	21.63	27.85	21.44	19.45	19.08	16.86	26.83	21.33
20.45	24.61	22.43	26.00	23.88	25.59	24.24	25.89	25.99	23.40	21.30	17.80	19.77	15.52	9.75	20.99	16.36	15.92

VARIANCE DES PLACES: 22.2451.10⁻⁴

ECART-TYPE: 4.7165 %



VARIOGRAMME DES PLACES



En lui-même le tableau des valeurs est instructif car il montre les possibilités de variation locale de la porosité.

La figure 14 représente le variogramme de ces données, calculés dans les lignes et les colonnes, avec comme paliers théoriques les variances expérimentales correspondantes ($19,8 \cdot 10^{-4}$ et $20,9 \cdot 10^{-4}$). La régionalisation est isotrope.

L'incrément minimum en h est ici la distance entre les centres de deux plages voisines soit environ 800μ . On constate qu'à ce niveau le phénomène se présente comme un "effet de pépite" à l'état pur. De toute l'organisation qui se développait à l'échelle de la dizaine ou centaine de microns il ne reste plus qu'une variance de $20 \cdot 10^{-4}$ qui donne une sorte de mesure globale indifférenciée de "l'intensité" de cette structure dépassée. Variance macroscopique parfaitement prévisible à partir de la covariance mesurée à petite échelle puisqu'elle n'est autre que la variance de la porosité d'une plage dans le champ.

$$\sigma_p^2 = \frac{a_2 pq}{S} \quad \left\{ \begin{array}{l} q = 22,8 \% \\ a_2 = 78,6 \cdot 10^2 \mu^2 \\ S = \text{carré de } 800 \mu \text{ de côté} \end{array} \right.$$

d'où $\underline{\sigma_p^2 = 21 \cdot 10^{-4}}$

CHAPITRE VII

ECHANTILLONNAGE ET ESTIMATION DE LA POROSITE

L'emprise de la fonction de covariance, ou du variogramme, sur la structure des phénomènes est suffisante pour résoudre les problèmes classiques d'échantillonnage en place. Combien faut-il examiner de points ou de plages d'une lame mince pour en estimer correctement la porosité ? Dans quelle mesure la lame elle-même est-elle représentative du plug ? Etc...

Autant de questions auxquelles la géostatistique apporte une réponse.

I - RAPPELS DE GEOSTATISTIQUE

On trouvera ici un rappel volontairement succinct des quelques résultats utilisés par la suite. Le lecteur se reportera à la bibliographie pour trouver les références des ouvrages de base sur le sujet.

Dans sa version probabiliste la géostatistique classique utilise la covariance (hypothèse minimale : stationnarité d'ordre deux* de la fonction aléatoire) ou le demi-variogramme qui nécessite des hypothèses moins fortes : stationnarité d'ordre deux des accroissements. Si $Y(x)$ est la fonction aléatoire :

(VII,1)

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[Y(x) - Y(x+h)]^2$$

Les trois notions-clés sont : variance d'extension, variance d'un volume v dans un volume V et variance d'estimation.

1 - Variance d'extension

Soient $Y(x)$ la fonction aléatoire et $Z(v)$ et $Z(v')$ les "teneurs moyennes" de deux domaines v et v' de l'espace, c'est-à-dire les intégrales stochastiques :

$$Z(v) = \frac{1}{V} \int_v Y(x) dx \text{ et } Z(v') = \frac{1}{V'} \int_{v'} Y(x) dx$$

* c'est-à-dire espérance de $Y(x)$ et $Y(x)Y(x+h)$ indépendante du point d'appui x .

On appelle variance d'extension de V à V' la variance de l'erreur que l'on commet en attribuant à V' la teneur moyenne $Z(V)$ de V, soit $D^2[Z(V) - Z(V')]$ qu'on notera aussi $\sigma^2_{(V \rightarrow V')}$.

Quand la covariance $C(x-y)$ existe :

$$(VII,2) \quad \sigma^2_{(V \rightarrow V')} = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V C(x-y) dy + \frac{1}{V'^2} \int_{V'} dx \int_{V'} C(x-y) dy - \frac{2}{VV'} \int_V dx \int_{V'} C(x-y) dy$$

Si la covariance n'existe pas on exprime la relation (VII,2) en fonction du demi-variogramme en remplaçant $C(x-y)$ par $-\gamma(x-y)$:

$$(VII,3) \quad \sigma^2_{(V \rightarrow V')} = \frac{2}{VV'} \int_V dx \int_{V'} \gamma(x-y) dy - \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-y) dy - \frac{2}{VV'} \int_V dx \int_{V'} \gamma(x-y) dy$$

2 - Variance de v dans V

La variance $\sigma^2(v/V)$ d'un échantillon v dans un domaine V a pour expression :

$$(VII,4) \quad \sigma^2(v/V) = \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x-y) dy - \frac{1}{v^2} \int_v dx \int_v \gamma(x-y) dy$$

(Expression analogue avec $\gamma(x-y) = -C(x-y)$ si cette dernière existe).

L'examen plus attentif de cette notion montre qu'elle n'a pas de sens précis que lorsque V apparaît comme la réunion $V = \bigcup_i v_i$ de volumes v_i disjoints, tous égaux à v et translatés les uns des autres.

On montre aussi que lorsque $V = \bigcup_i v_i$ $\sigma^2(v/V)$ est la moyenne en i de la variance d'extension de v_i dans V :

$$\sigma^2(v/V) = \frac{1}{N} \sum_i E[Z_i - Z(V)]^2$$

(Z_i : teneur de v_i).

Ces variances vérifient la relation d'additivité :

(VII,5)

$$\sigma^2(v/V') = \sigma^2(v/V) + \sigma^2(V/V')$$

où v , V et V' sont trois volumes tels que $v \subset V \subset V'$.

En langage imagé (VII,5) s'énonce : la variance de l'échantillon v dans le champ V' = variance de v dans le panneau V + variance du panneau V dans le champ V' .

3 - Variance d'estimation

C'est la variance de la différence entre la valeur estimée d'une quantité et sa valeur vraie.

Par exemple si le domaine V est reconnu par N prélèvements effectués aux points x_i la variance d'estimation σ_E^2 n'est autre que la variance d'extension des N points au domaine V , soit d'après la relation (VII,3) :

(VII,6)

$$\sigma_E^2 = \frac{2}{NV} \sum_i \int_V \gamma(x_i - x) dx - \frac{1}{V^2} \int_V dx \int_V \gamma(x - y) dy - \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_j \gamma(x_i - x_j)$$

En général on utilise des principes d'approximation comme celui de la composition des variances d'extension élémentaires qui consiste à fragmenter l'erreur totale en termes considérés comme indépendants et dont on additionne les variances.

II - FORMULES DES GRANDES MAILLES

Lorsque la portée (géostatistique) du phénomène est petite en regard de la taille du champ de mesure la covariance n'intervient plus que par sa valeur à l'origine et ses premiers moments. Toutes les fonctions usuelles de la géostatistique s'expriment en fonction de ces quelques coefficients 2 dans $\mathbb{R}^1$, 3 dans $\mathbb{R}^2$ et 4 dans $\mathbb{R}^3$. C'est le "principe d'approximation des grandes mailles". cf [18].

Calculons par exemple la variance de la porosité mesurée sur un segment de longueur l , une lame mince de surface S rectangulaire ou un plug supposé parallélépipédique.

1 - Sur la droite

Si ε^* est la porosité mesurée sur l ($\varepsilon^* = \frac{1}{l} \int_0^l k(x) dx$) et $C(h)$ la covariance de la fonction aléatoire $k(x)$ un calcul classique montre que :

$$(VII,7) \quad \sigma^2(\varepsilon^*) = \frac{1}{l^2} \int_{-l}^{+l} K(h) (C(h) - q^2) dh$$

où $K(h)$ est le covariogramme géométrique du segment l , soit $K(h) = \text{Mes}(l \cap l_h) = l - |h|$.

Par symétrie des fonctions :

$$\sigma^2(\varepsilon^*) = \frac{2}{l^2} \int_0^l (l-h) (C(h) - q^2) dh$$

Or si l est grand devant la portée a (géostatistique) $C(h) - q^2 \sim 0$ pour $h > a$ et l'intégrale peut être considérée comme prise sur la droite toute entière :

$$\sigma^2(\varepsilon^*) = \frac{2}{l^2} \int_0^\infty (l-h) (C(h) - q^2) dh = \frac{2}{l} \int_0^\infty (C(h) - q^2) dh - \frac{2}{l^2} \int_0^\infty h (C(h) - q^2) dh$$

$$\text{Si l'on pose } A_0 = 2 \int_0^\infty (C(h) - q^2) dh$$

$$\text{et } A_1 = 2 \int_0^\infty h (C(h) - q^2) dh$$

$$(VII,8) \quad \sigma^2(\varepsilon^*) = \frac{A_0}{l} + \frac{A_1}{l^2}$$

On retrouve la propriété d'estimateur asymptotique de la variance que possède la portée-intégrale puisque :

$$A_0 = a_1 \text{ pq et } \sigma^2(\varepsilon^*) \sim \frac{a_1 \text{ pq}}{l}$$

2 - Dans le plan

Des calculs analogues montrent que sous l'hypothèse d'une covariance isotrope et d'un rectangle dont les côtés a et b sont grands devant la portée, la variance de la lame mince (a,b) dans une section plane infinie s'écrit :

$$(VII,9) \quad \sigma^2(\varepsilon^*) = \frac{\pi A_1}{ab} - \frac{2 A_2}{ab} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{A_3}{a^2 b^2}$$

avec
$$A_2 = 2 \int_0^\infty h^2 [C(h) - q^2] dh$$

et
$$A_3 = 2 \int_0^\infty h^3 [C(h) - q^2] dh$$

Dans le premier terme on reconnaît encore $\frac{a_2 pq}{ab}$ où a_2 est la portée-intégrale à 2 dimensions.

3 - Dans l'espace

Les calculs montrent que de même la variance dans l'espace d'un parallélépipède (a, b, c) dont toutes les dimensions sont grandes vis-à-vis des portées s'écrit :

$$(VII, 10) \quad \sigma^2(\varepsilon^*) = \frac{2 \pi A_2}{abc} - \frac{\pi A_3}{abc} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right] + \frac{4}{3} \frac{A_4}{abc} \left[\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right] - \frac{2}{3} \frac{A_5}{a^2 b^2 c^2}$$

Avec comme toujours $A_n = 2 \int_0^\infty h^n [C(h) - q^2] dh$

$\frac{2 \pi A_2}{abc}$ n'est autre que $\frac{a_3 pq}{abc}$ où a_3 : portée-intégrale à 3 dimensions.

III - MODELES DE COVARIANCES

Les calculs des moments de la covariance, comme tous les calculs géostatistiques d'ailleurs, doivent être effectués sur un modèle théorique et non sur la courbe expérimentale. A la fois parce que celle-ci est nécessairement tronquée ce qui risque d'entraîner une sous-estimation, mais surtout parce qu'il est dangereux d'intégrer une courbe qu'on traite comme une covariance alors qu'on n'est pas sûr qu'elle soit bien de type positif. On s'expose à obtenir parfois des variances négatives !

Une fonction aléatoire en tout ou rien stationnaire possède nécessairement une variance finie (majorée par 1/4) et une tangente à l'origine oblique. (Elle peut être verticale dans les "cas pathologiques"). Parmi les schémas classiques de la géostatistique on ne peut retenir a priori que :

• Le schéma sphérique :
$$C(h) = pq \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{a} + \frac{1}{2} \frac{h^3}{a^3} \right) + q^2 \quad \text{si } h \leq a$$

$$= q^2 \quad \text{si } h \geq a$$

. Le schéma exponentiel : $C(h) = pq e^{-ah} + q^2$

On peut montrer que pour $C(o)$ et $C'(o)$ fixés, soit à porosité et surface spécifique données, le schéma sphérique décroît toujours plus vite que le schéma exponentiel. Or ce n'est pratiquement jamais le comportement des covariances des milieux poreux. Au contraire elles décroissent plutôt moins vite que l'exponentielle.

C'est pourquoi nous proposons le modèle

$C(h) = q^2 e^{\theta} e^{-\lambda |h|} = e^{-\theta} [2 - e^{-\lambda |h|}]$, covariance du schéma booléen-poissonien et qui décroît toujours plus lentement que l'exponentielle.

Ses moments $A_n = 2 \int_0^\infty r^n (C(r) - q^2) dr$ ont dans le cas isotrope pour expression générale :

$$(VII, 11) \quad A_n = \frac{2 q^2 n!}{\lambda^{n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^k}{k^{n+1} \cdot k!}$$

On trouvera en Annexes [II] la tabulation des valeurs de $\frac{\lambda A_0}{pq}$, $\lambda^2 A_1$, $\lambda^3 A_2$ et $\lambda^4 A_3$ pour des valeurs de q croissant de 0,001 à 0,5 avec un incrément de 0,001. Pour avoir le coefficient cherché il faudra donc diviser la valeur lue dans la table par λ^n , n étant convenablement choisi.

Les moments de la covariance exponentielle ne présentent aucune difficulté de calcul. On trouve :

$$(VII, 12) \quad A_n = 2 pq \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (C(h) = pq e^{-ah} + q^2)$$

IV - POROSITE D'UNE LAME MINCE

1 - Variance d'estimation

La technologie de l'A.T. impose des mesures par plages : pour estimer la porosité exacte d'une lame on pourrait procéder comme sur DELF 02 au moyen d'un recouvrement total. Mais la mesure serait trop longue pour un gain de précision faible. Il est préférable d'échantillonner.

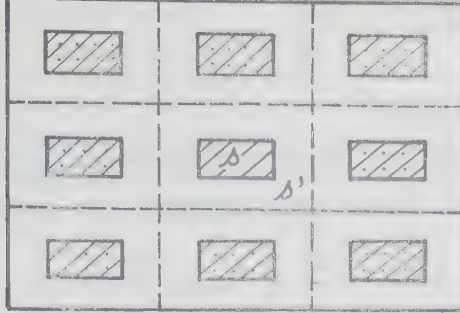


Fig. 1

On peut dénombrer trois causes d'erreurs :

- . l'échantillonnage de la lame par plages
- . l'échantillonnage des plages par points
- . le réglage du seuil

Les deux premières causes sont de nature géostatistique. Les erreurs en question ont une moyenne nulle et une variance qui s'exprime théoriquement par les formules (VII,3) ou (VII,6) mais qu'on calcule en fait par composition de variances élémentaires.

En revanche, dans le cas précis des milieux poreux visualisés en fluorescence, il semble plus réaliste de considérer l'erreur sur le seuil comme systématique. Dans une roche argileuse l'expérimentateur aura tendance à placer un seuil plutôt bas pour éliminer l'argile qui fluoresce faiblement ; du même coup seront supprimés certains petits pores ou canaux. Lorsque l'échantillon est vivement coloré l'effet de halo pourra au contraire causer une surestimation. Il est donc prudent d'admettre que sur chaque plage la mesure de la porosité est entachée d'un biais de signe constant, proportionnel à la surface spécifique, selon (III,3).

. Notations

ε = teneur vraie de la lame

ε^* = estimateur de ε

ε_i = teneur vraie de la plage i

ε_i^* = estimateur de ε_i corrigé du biais b_i

b_i = biais sur la plage i

ε_i' = teneur vraie de la zone d'influence de la plage i

N = nombre de plages

s : plage

σ_{Es}^2 : variance d'estimation de s

s' : zone d'influence

$\sigma_{(s \rightarrow s')}^2$: variance d'extension de s à s'

S : lame

σ_{ES}^2 : variance d'estimation de S

L'analyseur fournit les différentes valeurs $\varepsilon_i^* + b_i$ et comme on ne connaît pas b_i on prend comme estimateur de ε la quantité

$$\varepsilon^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i^* + b_i).$$

L'erreur $\varepsilon - \varepsilon^*$ peut se mettre sous la forme :

$$\varepsilon - \varepsilon^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\underbrace{(\varepsilon_i' - \varepsilon_i)}_{\substack{\text{extension} \\ \text{de } s \text{ à } s'}} + \underbrace{(\varepsilon_i - \varepsilon_i^*)}_{\substack{\text{estimation} \\ \text{de } s \\ \text{par points}}} - \underbrace{b_i}_{\text{biais}} \right]$$

L'espérance de l'erreur est $-E(b_i)$ qui n'est pas nul par hypothèse.

Sa variance $D^2(\varepsilon - \varepsilon^*) = \sigma_{ES}^2$ (variance d'estimation de S) compte tenu de l'hypothèse ordinaire de l'indépendance des écarts a pour expression :

$$(VII,13) \quad \sigma_{ES}^2 = \frac{1}{N} \left[\sigma_{(s \rightarrow s')}^2 + \sigma_{ES}^2 + D^2(b_i) \right]$$

La relation (VII,13) se simplifie.

La variance σ_{ES}^2 d'estimation d'une plage à l'aide d'une grille de 130.000 points est tout à fait négligeable.

Il en est de même pour $D^2(b_i)$, avec quelque réflexion cependant car b_i est proportionnel à la surface spécifique qui pourrait bien varier autant que la porosité elle-même. Mais on sait d'expérience que b_i est de l'ordre du dixième de la porosité si bien que sa variance est 100 fois plus faible.

A titre de vérification nous avons mesuré et relevé 72 covariances sur des plages de DELF 02 :

porosité moyenne

20.8 %

variance des porosités
des plages

21.8 . 10⁻⁴

surface spécifique moyenne

0,0236 μ^2/μ^3

(soit 0,0088 m²/g)

variance

22.87 10⁻⁶ (μ^2)

En étant pessimiste l'erreur sur le seuil est de deux pas :

$$b_i = 2 \times 1,78 \times \frac{\sigma_i}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_i : \text{surface spécifique} \\ \text{sur la plage } i \\ 1 \text{ pas} : 1,78 \mu \end{array} \right.$$

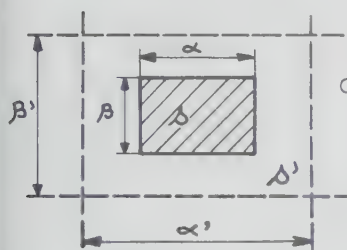
$$\text{d'où } E(b_i) = 2 \times 1,78 \times \frac{E(\sigma_i)}{4} = 2,1 \%$$

$$D^2(b_i) = \left(\frac{2 \times 1,78}{4}\right)^2 D^2(\sigma_i) = 18 \cdot 10^{-6}$$

alors que la variance des plages est de $21,8 \cdot 10^{-4}$, soit environ 100 fois plus.

On pourra donc considérer le biais comme une constante égale à $E(b_i)$.

Reste à évaluer la variance d'extension $\sigma_{(s \rightarrow s')}^2$. D'après la relation (VII,2) :



$$\sigma_{(s \rightarrow s')}^2 = \frac{1}{s'^2} \int_{s'} \int_{s'} [C(x-y) - q^2] dx dy + \frac{1}{s^2} \int_s \int_s [C(x-y) - q^2] dx dy - \frac{2}{s s'} \int_s \int_{s'} [C(x-y) - q^2] dx dy$$

Fig. 2

Le calcul se simplifie beaucoup lorsque la portée est faible devant les dimensions de s et a fortiori de s' (Grandes mailles). Les deux premières intégrales sont données par la formule (VII,9) ; la troisième a pour valeur $\frac{2 \pi A_1}{\alpha' \beta'}$.

D'où l'expression finale de la variance d'estimation :

(VII,14)

$$\sigma_{ES}^2 = \frac{1}{N} \sigma_{(s \rightarrow s')}^2$$

$$\sigma_{(s \rightarrow s')}^2 = \pi A_1 \left[\frac{1}{\alpha \beta} - \frac{1}{\alpha' \beta'} \right] - 2 A_2 \left[\frac{1}{\alpha \beta} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\alpha' \beta'} \left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} \right) \right] + A_3 \left[\frac{1}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{1}{\alpha'^2 \beta'^2} \right]$$

Ce résultat n'est valable rappelons-le que dans le cas des "grandes mailles" et lorsque l'échantillonnage est suffisamment clairsemé pour que les diverses zones d'influence soient indépendantes.

La relation (VII,14) peut s'exprimer de manière plus géométrique en remarquant que :

$Ns' = S$: surface totale de la lame mince

$\alpha + \beta = \mathcal{L}$: demi-périmètre du champ

et en posant

$\alpha' + \beta' = \mathcal{L}'$: demi-périmètre de la zone d'influence

$$(VII,15) \quad \sigma_{ES}^2 = \Pi A_1 \left[\frac{1}{Ns} - \frac{1}{S} \right] - \frac{2 A_2}{N} \left[\frac{\mathcal{L}}{s^2} + \frac{\mathcal{L}'}{s'^2} \right] + \frac{A_3}{N} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s'^2} \right]$$

La partie principale $\Pi A_1 \left[\frac{1}{Ns} - \frac{1}{S} \right]$ permet une approximation rapide de la variance et donc une évaluation du nombre de plages nécessaires pour une précision voulue.

2 - Fourchette d'erreur

La connaissance de la variance de l'estimateur ε^* permettrait de fixer un intervalle de confiance si l'on connaissait sa distribution. Dans le cas de la loi normale on sait qu'un intervalle de 4 écarts-type contient 95 % des valeurs et pour la plupart des lois il en est ainsi.

De fait ε^* est moyenne d'une trentaine de valeurs au moins, sans grande corrélation si les plages sont espacées, et le théorème central-limite laisse prévoir une allure gaussienne. Un argument supplémentaire est le comportement gaussien des porosités des plages elles-mêmes.

Compte tenu du biais $E(b_i)$ dont on ne connaît pas le signe, a priori, la fourchette d'erreur est donc

$$\pm [2 \sigma_{ES} + |E(b_i)|]$$

$|E(b_i)| = -C'(o)$ (ou $-2 C'(o)$) lorsque $C'(o)$ est exprimé en pas^{-1} (formule III,3).

3 - Exemple expérimental

Sur l'échantillon DELF 14 de dolomie sparitique on a mesuré la covariance en prenant soin de noter la porosité de chacune des plages. On dispose ainsi d'une valeur expérimentale de la variance d'une plage dans la lame qu'on pourra confronter avec l'évaluation géostatistique. Ces calculs géostatistiques seront effectués sur un modèle et non sur la courbe elle-même ; on pourra les comparer avec les valeurs tirées d'estimations purement numériques. Enfin on calculera la variance d'estimation de la porosité de la lame et l'intervalle de confiance résultant.

La covariance expérimentale admet les valeurs suivantes :

H microns	0.0	4.57	9.14	13.71	27.43	45.71	91.43	137.1	182.7
C(H) %	7.17	6.61	6.34	6.05	5.28	4.52	3.30	2.59	2.12

H	228.6	274.3	320.0	365.7	457.1	548.6	594.3	640.0	685.7
C(H)	1.79	1.57	1.41	1.26	1.02	0.89	0.83	0.78	0.73

Le tracé sur papier log-arithmétique montre que la courbe décroît moins vite qu'une exponentielle.

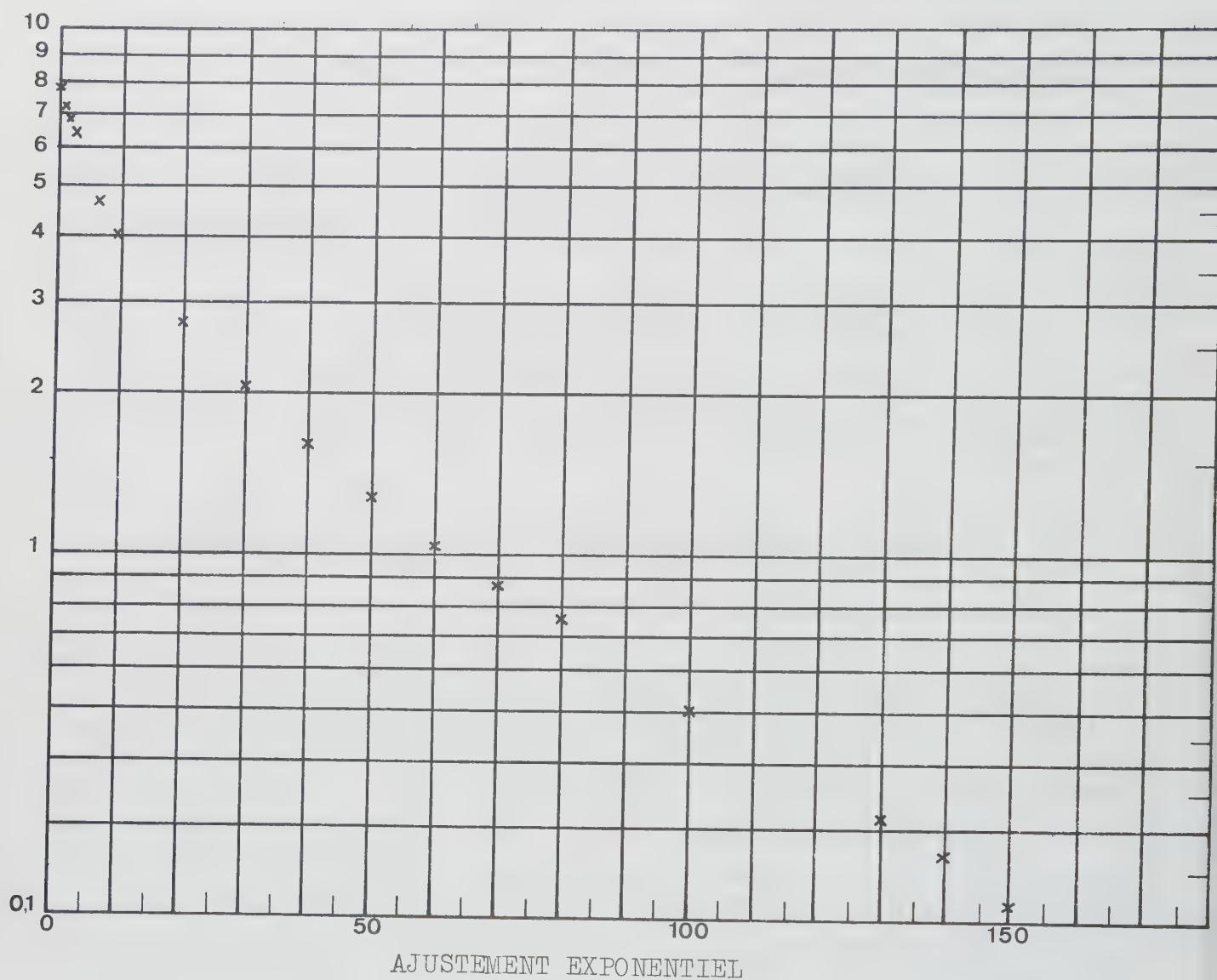


Fig. 3

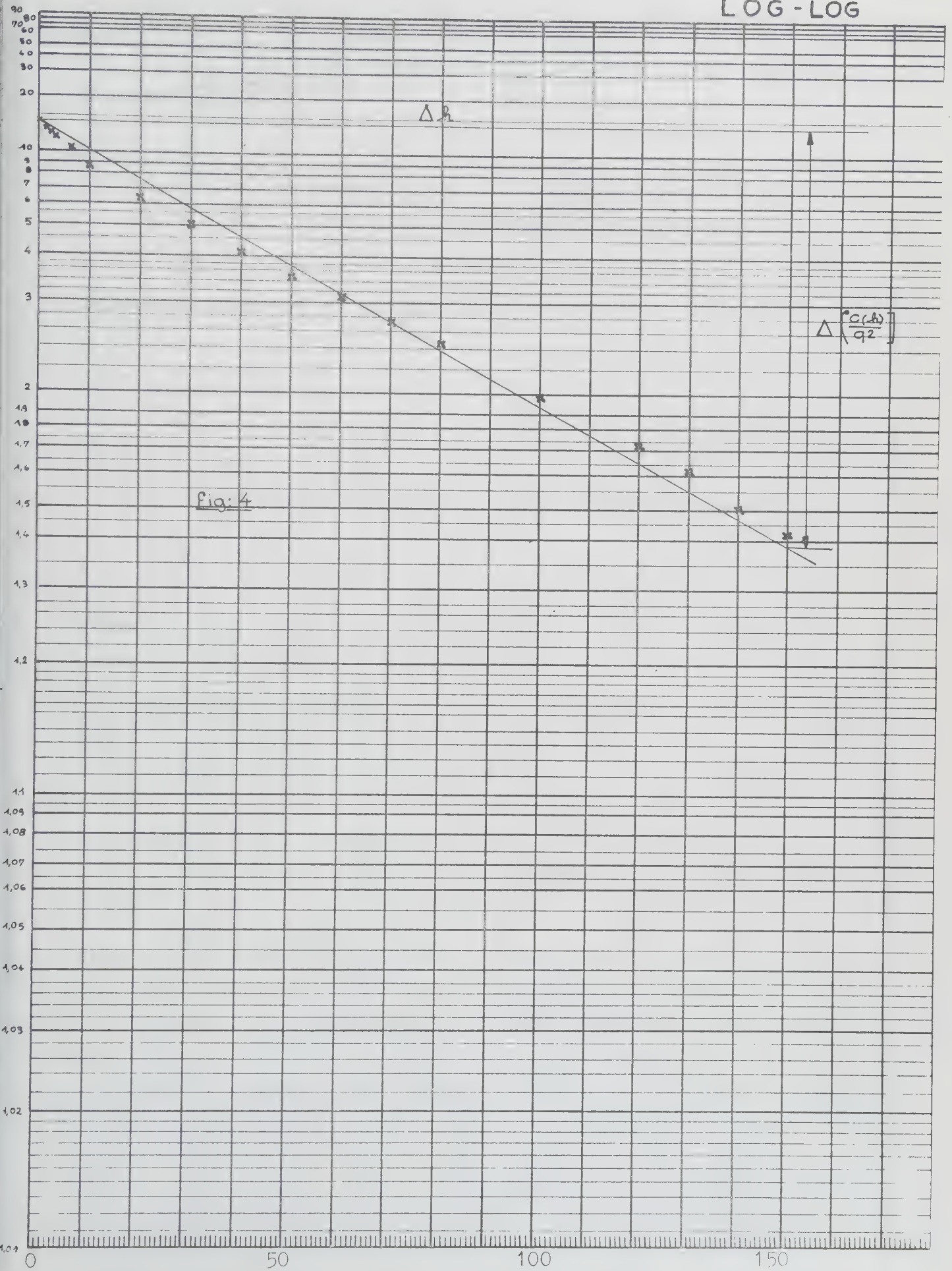
Pour tester le schéma booléen-poissonien nous avons construit un papier graphique Log Log-arithmétique qui transforme son graphe en une droite. En effet si

$$C(h) = q^2 \theta e^{-\lambda h}$$

$$\text{Log}\left[\text{Log}\left(\frac{C(h)}{q^2}\right)\right] = \text{Log } \theta - \lambda h$$

L'ajustement est bien meilleur (Fig. 4).

LOG - LOG



Le paramètre θ se calcule par la relation $e^\theta = q$ et λ apparaît sur le graphique comme pente de la droite. Pour en calculer la valeur il faut savoir que 4 cm sur le dessin représentent un accroissement de 1 pour $\frac{C(h)}{2}$.

D'où :

$$\lambda = - \frac{\Delta \left[\frac{C(h)}{2} \right] \text{ en cm}}{4 \Delta h}$$

$\frac{1}{\lambda}$ est ici exprimé dans la même unité que h , en pas ou en microns.

On trouve $\Delta \left[\frac{C(h)}{2} \right] = 8,25 \text{ cm}$ pour $\Delta h = 150 \text{ pas}$

d'où $\frac{1}{\lambda} = 72,73 \text{ pas}$, avec $1 \text{ pas} = 4,57 \mu$.

Les tables en Annexes donnent les coefficients A_i :

$$\frac{\lambda A_0}{Pq} = 0,96 \quad \lambda^2 \Pi A_1 = 0,13 \quad \lambda^3 A_2 = 0,066 \quad \lambda^4 A_3 = 0,179$$

D'où les portées-intégrales a_1 , a_2 et a_3 qu'il est intéressant de comparer avec celles qu'on obtient par intégration numérique.

portées	Valeurs calculées	Intégration numérique
1 dimension	319 μ	277 μ
2 dimensions	$0,216 \cdot 10^6 \mu^2$	$0,151 \cdot 10^6$
3 dimensions	$2,288 \cdot 10^8 \mu^3$	$0,938 \cdot 10^8$

Les valeurs diffèrent parfois notablement : rapport 1,4 pour la portée à 2 dimensions et 2,4 pour celle à 3 dimensions. C'est que la covariance n'a pas encore atteint son palier dans les limites du champ l'intégration numérique calcule des valeurs par défaut, et ce d'autant plus qu'on attribue un poids plus grand aux valeurs x éloignées (x pour a_2 , x^2 pour a_3).

a) Variance d'une plage dans la lame

La plage est un carré de 480 pas de côté, soit 2,2 mm.

Donc $\alpha = \beta = 480 \text{ pas} = 2,2 \text{ mm}$

La lame S est un carré de côté $a = b = 20$ mm.

La relation d'additivité (VII,5) exprime la variance d'une plage s dans la lame S :

$$\sigma_{(s/S)}^2 = \underbrace{\sigma_{(s/\infty)}^2}_{\substack{\text{variance d'une} \\ \text{plage dans le} \\ \text{plan infini}}} - \underbrace{\sigma_{(S/\infty)}^2}_{\substack{\text{variance de} \\ \text{la lame dans} \\ \text{le plan infini}}}$$

$\sigma_{(s/\infty)}^2$ et $\sigma_{(S/\infty)}^2$ s'obtiennent chacune par la formule (VII,9) et l'on a par différence :

$$\sigma_{(s/S)}^2 = \Pi A_1 \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{a^2} \right] - 4 A_2 \left[\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{a^3} \right] + A_3 \left[\frac{1}{\alpha^4} - \frac{1}{a^4} \right]$$

a étant dix fois supérieur à α on peut négliger $\frac{1}{a^2}$ devant $\frac{1}{\alpha^2}$, etc.

Alors :

(VII,17)

$$\sigma_{(s/S)}^2 = \frac{\Pi A_1}{\alpha^2} - \frac{4 A_2}{\alpha^3} + \frac{A_3}{\alpha^4}$$

Dans le cas présent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Pi A_1}{\alpha^2} &= 29,84 \cdot 10^{-4} \\ \frac{4 A_2}{\alpha^3} &= 9,18 \cdot 10^{-4} \\ \frac{A_3}{\alpha^4} &= 0,94 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \right\} \quad \sigma_{(s/S)}^2 = 21,6 \cdot 10^{-4}$$

Or voici les valeurs (en %) relevées sur les différentes plages :

12.64	13.90	12.98	4.01	5.05	16.15	9.92	6.15
8.34	14.68	11.41	2.20	4.96	10.33	5.66	10.33
4.89	5.99	10.48	4.74	0.29	2.02	4.54	1.47
28.34	8.27	13.53	8.03	10.40	12.10	4.00	3.41
19.14	17.55	5.87	7.95	3.60	2.47	7.83	5.78
10.44	7.09	8.27	5.03	6.71	6.12	0.17	3.83
10.56	7.10	5.84	6.62	5.16	6.74	2.14	1.55
1.28	2.13	5.86	2.86	2.48	0.69	4.39	4.62

Leur variance est de $24,45.10^{-4}$ (variance des valeurs vraies : celles du tableau divisées par 100).

D'après l'intégration numérique on trouverait $17,13.10^{-4}$

	Modèle	Expérimental	Numérique
$\sigma^2(s/S)$	$21,60.10^{-4}$	$25,45.10^{-4}$	$17,13.10^{-4}$

Le modèle conduit à une très bonne estimation de la variance expérimentale.

b - Variance d'estimation de la porosité de la lame

Il ne reste plus qu'à appliquer la formule (VII,14). Les plages s'étant carrées, ainsi que les zones d'influence s', puisque la lame elle-même est carrée et l'échantillonnage régulier, (VII,14) s'écrit :

$$\sigma^2(s \rightarrow s') = \pi A_1 \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha'^2} \right] - 4 A_2 \left[\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha'^3} \right] + A_3 \left[\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\alpha'^4} \right]$$

Pour le calcul il est commode d'exprimer les caractéristiques de s' en fonction seulement du nombre de plages N

$$S = N \alpha'^2 = 400.10^6 \mu^2$$

$$\frac{s}{s'} = \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} = \frac{(4,57 \times 480)^2}{400.10^6} N = 0,012 N$$

$$(VII,18) \quad \sigma^2(s \rightarrow s') = \frac{\pi A_1}{\alpha^2} [1 - 0,012 N] - \frac{4 A_2}{\alpha^3} [1 + (0,012 N)^2] + \frac{A_3}{\alpha^4} [1 + (0,012 N)^3]$$

• N = 64

On trouve une variance négative !

C'est que $\frac{s}{s'} = 0,77$ est trop grand. Les 64 champs couvrent la presque totalité de la lame et les hypothèses des "grandes mailles" ne sont pas vérifiées.

• N = 32

$$\sigma^2(s \rightarrow s') = 8.84.10^{-4} \rightarrow \sigma_{E_S}^2 = 0,276.10^{-4}$$

• N = 16

$$\sigma^2(s \rightarrow s') = 15,54.10^{-4} \rightarrow \sigma_{E_S}^2 = 0,971.10^{-4}$$

Par ailleurs $-C'(o)$ exprimée en pas^{-1} vaut 0,7 % ; si l'on juge que le réglage des seuils s'effectue au pas près, ce qui est vrai ici car l'échantillon est bien contrasté, on a $|E(b_i)| = 0,7 \%$. D'où les incertitudes :

N	32	16
$2 \sigma_{E_S}$	1 %	2 %
$ E(b_i) $	0,7 %	0,7 %
Incerti- tude	$\pm 1,7\%$	$\pm 2,7\%$

Une fourchette de 2,7 % pour N = 16 par exemple signifie que si la valeur expérimentale est de 6,35 % la valeur exacte est située dans l'intervalle 3,65 % - 9,05 %.

Apparemment l'intervalle de 2σ pour la variance d'estimation est large. Sur les 64 plages les 4 échantillonnages réguliers possibles avec 16 points donnent pour porosités :

7,55 %
6,88 %
7,89 %
6,35 %

L'écart maximum avec la valeur exacte de 7,17 % est de 0,8 % alors que la fourchette de 2σ permet jusqu'à 2 %.

On remarquera également que le phénomène est très dispersé : les porosité varient entre 0,29 % et 28,34 % (fig. 5).

V - POROSITE D'UN PLUG

1 - Formules théoriques

On peut assimiler le plug à un parallélépipède a, b, c . (en fait ici $a = b = c \sim 2$ cm, mais traitons le cas général). Une lame mince S est taillée soit au milieu soit sur une face. V étant le volume du plug et S la surface de la lame, la variance de l'erreur que l'on commet en prenant la porosité de S comme estimateur de celle de V (variance d'extension de S à v) s'écrit :

$$D^2(q_S - q_V) = \frac{1}{V^2} \int_V \int_V (C(x, x') - q^2) dx dx' + \frac{1}{S^2} \int_S \int_S (C(x, x') - q^2) dx dx' - \frac{2}{VS} \int_V \int_S (C(x, x') - q^2) dx dx'$$

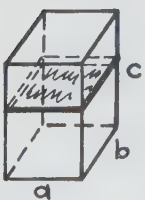
Dans l'hypothèse où les dimensions de V et de S sont grandes devant la portée on peut exprimer ces intégrales en fonction de cinq coefficients A_i .

Variance d'un parallélépipède a, b, c dans le champ :

$$(VII, 19) \quad C-F(a, b, c) = \frac{2\pi A_2}{abc} - \frac{\pi A_3}{abc} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right] + \frac{4}{3} \frac{A_4}{abc} \left[\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right] - \frac{2}{3} \frac{A_5}{a^2 b^2 c^2}$$

avec $A_n = 2 \int_0^\infty r^n (C(r) - q^2) dr$ $a, b, c > \text{portée}$

* Si la lame mince est parallèle à la face (a, b) et coupe l'arête c en son milieu :



$$\frac{2}{VS} \int_V \int_S (C(x, x') - q^2) dx dx' = \frac{4\pi A_2}{abc} - \frac{2\pi A_3}{abc} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] + \frac{8}{3} \frac{A_4}{abc} \frac{1}{ab}$$

D'où la variance d'estimation :

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi A_2}{abc} - \frac{\pi A_3}{abc} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right] + \frac{4}{3} \frac{A_4}{abc} \left[\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right] - \frac{2}{3} \frac{A_5}{a^2 b^2 c^2} \\ & + \frac{\pi A_1}{ab} - \frac{2A_2}{ab} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] + \frac{A_3}{a^2 b^2} \\ & + \frac{-4\pi A_2}{abc} - \frac{+2\pi A_3}{abc} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] - \frac{8}{3} \frac{A_4}{abc} \frac{1}{ab} \end{aligned}$$

(II,20)

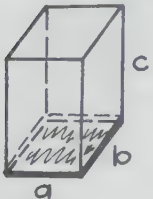
$$\begin{aligned} \sigma_{(S \rightarrow V)}^2 = & \frac{\pi A_1}{ab} - \frac{2A_2}{ab} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{\pi}{c} \right] + \frac{A_3}{ab} \left[\frac{1}{ab} + \frac{\pi}{ac} + \frac{\pi}{bc} - \frac{\pi^2}{c^2} \right] \\ & + \frac{4}{3} \frac{A_4}{abc} \left[\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} - \frac{1}{ab} \right] - \frac{2}{3} \frac{A_5}{a^2 b^2 c^2} \end{aligned}$$

Lorsque $a = b = c$ (VII,20) devient :

(VII,21)

$$\sigma_{(S \rightarrow V)}^2 = \frac{\pi A_1}{a^2} - \frac{2(2+\pi)A_2}{a^3} + (1+\pi) \frac{A_3}{a^4} + \frac{4}{3} \frac{A_4}{a^5} - \frac{2}{3} \frac{A_5}{a^6}$$

* Si la lame mince est taillée sur la face (a,b)



l'intégrale $\frac{2}{VS} \iint_V (C(x,x') - q^2) dx dx'$ vaut

la moitié de sa valeur précédente et l'on a :

(VII,22)

$$\begin{aligned} \sigma_{(S \rightarrow V)}^2 = & \frac{\pi A_1}{ab} - \frac{2A_2}{ab} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right] + \frac{A_3}{ab} \left[\frac{1}{ab} - \frac{\pi}{c^2} \right] + \frac{4}{3} \frac{A_4}{abc} \left[\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right] \\ & - \frac{2}{3} \frac{A_5}{a^2 b^2 c^2} \end{aligned}$$

lorsque $a = b = c$

(VII,23)

$$\sigma_{(S \rightarrow V)}^2 = \frac{\pi A_1}{a^2} - \frac{4A_2}{a^3} - (\pi-1) \frac{A_3}{a^4} + \frac{8}{3} \frac{A_4}{a^5} - \frac{2}{3} \frac{A_5}{a^6}$$

La variance d'estimation du plug à partir d'une lame mince est la somme de deux termes : variance d'estimation de la lame à partir des plages et variance d'extension de la lame au plug.

(VII,24)

$$\sigma_{E_V}^2 = \sigma_{E_S}^2 + \sigma_{(S \rightarrow V)}^2$$

Compte tenu des relations (VII,14), (VII,20) et (VII,22) les deux premiers termes de $\sigma_{E_V}^2$ sont :

$$(VII,25) \quad \sigma_{E_V}^2 = \frac{\pi A_1}{N} \left[\frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha'\beta'} + \frac{N}{a^2} \right] - \frac{2A_2}{N} \left[\frac{1}{\alpha\beta} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) + \frac{1}{\alpha'\beta'} \left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} \right) + \frac{N}{ab} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{b} + \left(\frac{\pi}{c} \right) \right) \right]$$

(le terme $\frac{\pi}{c}$ écrit entre parenthèses ne figure que dans le cas où la lame est au milieu du plug).

Rappelons que a , b et c sont les dimensions du plug, α et β celles d'une plage et α' , β' celles de sa zone d'influence dans la lame. N est le nombre de plages mesurées.

Lorsque $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$ et $a = b = c$ (VII,25) s'écrit :

$$(VII,26) \quad \sigma_{E_V}^2 = \frac{\pi A_1}{N} \left[\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha'^2} + \frac{N}{a^2} \right] - \frac{4A_2}{N} \left[\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha'^3} + \frac{N}{a^3} \left(+ \frac{N\pi}{2a^3} \right) \right]$$

2 - Exemple d'application

Reprenons l'échantillon DELF 14.

La variance d'estimation d'une plage $\sigma_{E_S}^2$ a déjà été calculée.

En supposant la lame taillée sur l'une des faces du plug on applique la formule (VII,23), en ne conservant que les deux premiers termes :

$$\pi A_1 = 14\,362 \mu^2$$

$$A_2 = 2,42 \cdot 10^6 \mu^3$$

$$a = 2 \cdot 10^4 \mu$$

$$\sigma_{(S \rightarrow V)}^2 \sim \frac{14362}{4 \cdot 10^8} - \frac{4 \times 2,42 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^{12}} = 0,359 \cdot 10^{-4} - 0,012 \cdot 10^{-4} \\ = \underline{0,347 \cdot 10^{-4}}$$

Au total la variance d'estimation du plug est donc :

<u>N = 32</u>		<u>N = 16</u>
$\sigma_{E_S}^2 = 0,276 \cdot 10^{-4}$		$\sigma_{E_S}^2 = 0,971 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{(S \rightarrow V)}^2 = 0,347 \cdot 10^{-4}$		$\sigma_{(S \rightarrow V)}^2 = 0,347 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{E_V}^2 = \underline{0,623 \cdot 10^{-4}}$		$\sigma_{E_V}^2 = \underline{1,318 \cdot 10^{-4}}$

D'où pour les incertitudes :

<u>$2 \sigma_{E_V} = 1,6 \%$</u>		<u>$2 \sigma_{E_V} = 2,3 \%$</u>
---	--	---

Si l'on tient compte d'un biais de réglage des seuils il faut bien sûr ajouter 0,7 %.

Bien entendu si la lame mince est parfaitement connue il ne reste plus que le terme $\sigma_{(S \rightarrow V)}^2 = 0,35 \cdot 10^{-4}$ d'où la fourchette $2 \sigma_{E_V} = 1,2 \%$.

Dans l'exemple présent la variance d'extension de la lame au plug est du même ordre de grandeur que la variance d'estimation de la lame.

Il n'en est pas de même sur l'échantillon DELF 07 par exemple où la variance $\sigma_{(S \rightarrow V)}^2 = 0,63 \cdot 10^{-6}$ alors que $\sigma_{E_S}^2$, selon le nombre de plages a pour valeurs :

<u>N = 64</u>	<u>N = 32</u>	<u>N = 16</u>
$10,2 \cdot 10^{-6}$	$21 \cdot 10^{-6}$	$42,77 \cdot 10^{-6}$

soit de 16 à 68 fois plus forte.

La différence d'homogénéisation apparaît dans ces chiffres :
pour DELF 14 avec 16 plages $\sigma_{EV}^2 = 1,32.10^{-4}$ alors que pour DELF 07
 $\sigma_{EV}^2 = (42,77 + 0,63).10^{-6} = 43,40.10^{-6}$
 $= 0,434.10^{-4}$

soit une variance trois fois moindre alors que la surface totale analysée est pourtant 250 fois plus faible. En effet :

Sur DELF 07	1 pas = 1,16 μ	
		$\rightarrow 16 \times \left(\frac{4,57}{1,16}\right)^2 = 248$
DELF 14	1 pas = 4,57 μ	

CHAPITRE VIII

LES GRANULOMETRIES

La fonction de covariance exprime la probabilité que deux points distants de h appartiennent par exemple aux grains, sans se préoccuper de savoir s'ils sont implantés dans le même grain ou deux grains différents. Le caractère discontinu de l'élément structurant lui permet d'enjamber grains ou pores et de révéler ainsi l'agencement des éléments de la roche. C'est en ce sens que nous avons qualifié de "structurale" la fonction de covariance.

D'autres grandeurs comme la taille, la forme ou l'orientation des grains concernent les éléments de la roche eux-mêmes, indépendamment de leur disposition relative. Ce sont des caractéristiques qu'on pourrait nommer de "nature granulométrique". Pour les mesurer il faut utiliser des éléments structurants comme le segment de droite ou le cercle, qui ne puissent mettre simultanément en jeu plusieurs grains distincts.

Ce classement des paramètres en deux groupes n'est pas nouveau. On le trouve par exemple dans l'ouvrage de STRAKHOV [23] avec une terminologie différente : un paramètre "de structure" y désigne ce qu'on nomme ici "de nature granulométrique", tandis qu'un paramètre de "texture" se rapporte à l'agencement des éléments. L'innovation de la Morphologie Mathématique consiste à généraliser des notions comme la taille moyenne ou la granulométrie qui, à défaut d'être toujours très précises et explicites, du moins se conçoivent bien pour des ensembles à éléments individualisés comme une population de grains, mais perdent toute signification dans le cas de milieux informes comme un réseau poreux interconnecté.

I - LE CONCEPT DE GRANULOMETRIE - DEFINITIONS

On sait que la notion de granulométrie peut recouvrir des réalités expérimentales très différentes : histogramme des traversées des éléments de la roche pour un pétrographe, courbe d'injection de mercure pour le spécialiste des milieux poreux, résultat d'un tamisage pour le technicien de la fragmentation. Mais du fait qu'elles reflètent toutes une distribution de tailles ces mesures possèdent une structure profonde commune.

Analysant la notion usuelle de granulométrie G. MATHERON [16] a mis en évidence quatre propriétés fondamentales qu'il propose d'ériger, en axiomes constitutifs. Cette théorie révèle un résultat tout à fait surprenant, à savoir que toute granulométrie possédant les "bonnes propriétés" physiques s'exprime comme une réunion d'ouvertures.

Ainsi la construction du concept de granulométrie à partir de celui d'ouverture est elle solidement ancrée dans la réalité expérimentale.

Ce concept sera présenté ici sous ses deux facettes : géométrique et probabiliste, puis interprété en termes de "taille" des éléments.

1 - Les Axiomes des granulométries

"On se donne des tamis dont les mailles sont définies par leurs dimensions, caractérisées par un nombre $\lambda > 0$. Lorsqu'on applique le tamis de dimension λ à un ensemble A , son refus est un sous-ensemble de A , que l'on peut désigner par $\phi_\lambda(A)$. Ainsi $\phi_\lambda(A) \subset A$. Si $\lambda \geq \mu$, le refus de la plus grande maille λ est plus petit que celui de la maille plus petite μ , soit $\phi_\lambda(A) \subset \phi_\mu(A)$. Si un ensemble B contient un ensemble A , son refus pour une maille λ donnée est plus grand que celui de A , soit $B \supset A \Rightarrow \phi_\lambda(B) \supset \phi_\lambda(A)$. Si l'on applique au refus $\phi_\lambda(A)$ de A pour une maille donnée λ un tamis de maille μ plus petite, le refus est $\phi_\lambda(A)$ lui-même, soit $\phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda$ si $\lambda \geq \mu$. Au contraire, si $\mu \geq \lambda$, le refus de $\phi_\lambda(A)$ pour le tamis μ est identique au refus de A lui-même pour ce même tamis, soit $\phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_\mu$ si $\mu \geq \lambda$. Erigeons donc en axiomes constitutifs ces propriétés des granulométries usuelles, et posons la définition suivante :

Définition d'une granulométrie - Soit E un ensemble, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E . On appelle granulométrie sur $\mathcal{A}$ une famille ϕ_λ , $\lambda > 0$ à un paramètre λ positif d'applications de $\mathcal{A}$ dans lui-même vérifiant les 4 axiomes suivants :

1. $\phi_\lambda(A) \subset A$, $\lambda > 0$, $A \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \Rightarrow \phi_\lambda(A) \subset \phi_\lambda(B)$ $\forall \lambda > 0$
3. $\lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \phi_\lambda(A) \subset \phi_\mu(A)$ $(A \in \mathcal{A})$
4. $\phi_\lambda \circ \phi_\mu = \phi_\mu \circ \phi_\lambda = \phi_{\sup(\lambda, \mu)}$

On peut, conventionnellement, compléter la famille $(\phi_\lambda, \lambda > 0)$ pour $\lambda = 0$ en posant $\phi_0(A) = A$ pour $A \in \mathcal{A}$.

Dans le cas où l'espace E de départ est l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ les granulométries sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ possèdent deux autres propriétés qui érigées également en axiomes vont caractériser les granulométries dites "euclidiennes".

Les granulométries usuelles sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ sont compatibles avec les translations, en ce sens que le refus du translaté A_x d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ pour le tamis de maille λ est le translaté par x du refus de A , soit $\phi_\lambda(A_x) = \phi_\lambda(A) \oplus \{x\}$. De plus, les tamis que l'on utilise sont en général homothétiques, le module λ d'homothétie entre chaque tamis et un tamis de référence pouvant servir à indexer les tamis eux-mêmes. Avec cette définition du paramètre λ , on a alors $\phi_\lambda(A) = \lambda \phi_1(A)$.

Définition - On dit qu'une granulométrie $\phi_\lambda, \lambda > 0$ sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ stable pour les translations et les homothéties positives est une granulométrie euclidienne si elle vérifie les deux axiomes suivants :

5 - Pour tout $\lambda > 0$, ϕ_λ est compatible avec les translations.

6 - Pour tout $\lambda > 0$, et tout $A \in \mathcal{A}$, on a : $\phi_\lambda(A) = \lambda \phi_1\left(\frac{A}{\lambda}\right)$

2 - Granulométries par ouverture

a - Présentation géométrique

Soit A un ensemble de $\mathbb{R}^n$, qu'on suppose ici fermé et borné. $\{B_\lambda\}$ est la famille des ensembles convexes homothétiques du compact non vide B . On montre que $\phi_\lambda(A) = (A \ominus \check{B}_\lambda) \oplus B_\lambda = A \omega_\lambda$ est une granulométrie euclidienne. C'est même la forme la plus simple de telles granulométries.

Si A est mesurable (et borné par hypothèse) on peut parler de la mesure $\text{Mes}(A \omega_\lambda)$ de l'ouverture $A \omega_\lambda$ et définir la fonction :

(VIII,1)

$$G(\lambda) = 1 - \frac{\text{Mes}(A \omega_\lambda)}{\text{Mes}(A)}$$

Cette fonction :

- . est non décroissante en λ
- . continue à gauche (car ϕ_λ semi-continue supérieurement)
- . prend la valeur 0 en $\lambda = 0$ et 1 en $\lambda = \infty$

Elle a les propriétés d'une fonction de répartition. On la nomme : granulométrie de A selon B.

Trois exemples classiques illustrent le degré de généralité de cette définition.

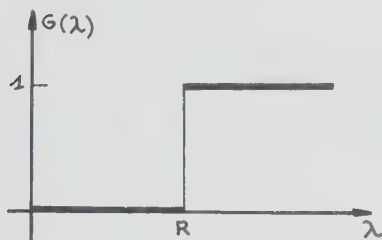
Exemples

- a. Si A est constitué d'une sphère unique de rayon R et l'élément structurant B également sphérique :

$$A\omega_\lambda = A \quad \forall \lambda \leq R$$

$$A\omega_\lambda = \emptyset \quad \lambda > R$$

Donc $G(\lambda)$ est l'échelon unité



C'est bien la courbe granulométrique associée à ce grain unique de rayon R.

Si maintenant on a affaire à plusieurs grains sphériques, de rayon différents, $Mes(A\omega_\lambda)$ est le volume total des sphères de rayon supérieur à λ et $G(\lambda)$ représente le pourcentage en volume total $Mes(A)$ des sphères de rayon inférieur à λ . C'est bien la courbe granulométrique cumulée habituelle.

- b. A étant un réseau de pores et B_λ sphérique on a vu au chapitre V que $G(\lambda)$ a une signification voisine de celle du PURCELL, les différences provenant des relations de connexité entre les pores.
- c. Quand on prend pour B_λ un segment de droite de longueur λ et de direction α donnée, $G(\lambda)$ est la granulométrie des traversées mesurées dans la direction α .

$B_\lambda \subset A$. Par exemple la taille d'un grain selon une sphère serait le rayon de la sphère inscrite.

Mais cette formulation n'est opératoire dans le cas de grains distincts. La plus grande sphère inscrite dans un réseau poreux connexe ne présente aucun intérêt.

Nous allons donc modifier un peu la définition en levant l'hypothèse implicite d'individualisation des éléments et posant :

$$\Lambda B(x) = \sup\{\lambda : \exists y \in \mathbb{R}^n, B_\lambda + y \subset A, B_\lambda + y \ni x\}$$

$\Lambda B(x)$ est la taille granulométrique de A au point x (selon B) et représente le paramètre λ du plus grand ensemble B_λ inclus dans A et contenant le point x.

Exemples

famille $\{B_\lambda\}$ de cercles

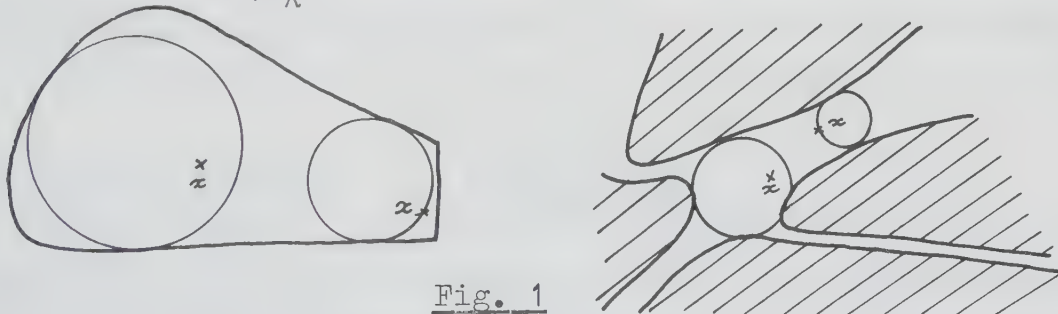


Fig. 1

On remarque que la taille granulométrique de A selon B ne dépend pas du point si et seulement si A est de la forme λB : c'est le cas de la définition naturelle de la taille.

Lorsque A est un ensemble déterminé (supposé borné et mesurable) $\Lambda B(x)$ est une fonction ordinaire de x. On peut en faire une variable aléatoire relativement à l'implantation du point x placé au hasard dans A (densité uniforme $\frac{1}{\text{Mes}(A)}$).

Comme l'ouverture Aw_λ est précisément la réunion de tous les ensembles B_λ inclus dans A, conditionnellement au fait que x appartient à A il vient :

$$\Lambda B(x) \geq \lambda \Leftrightarrow \exists \text{ une figure } B_\mu \ (\mu \geq \lambda) \text{ incluse dans A et contenant x}$$

$$\Leftrightarrow \exists \mu \geq \lambda \text{ tel que } x \in Aw_\mu$$

$$\Leftrightarrow x \in \bigcup Aw_\lambda$$

b - Présentation probabiliste

A est à présent considéré comme un ensemble aléatoire. Pour tout compact B, $A\omega_B$ est également un ensemble aléatoire. La notion de mesure de $A\omega_B$ est remplacée par celle de probabilité pour que x appartienne à l'ouverture de A. On pose :

$$(VIII,2) \quad G_x(\lambda) = 1 - \frac{P\{x \in A\omega_\lambda\}}{P\{x \in A\}}$$

(B_λ) étant toujours un demi-groupe continu dans l'ensemble des compacts non vides $(B_\lambda \oplus B_\mu = B_{\lambda+\mu})$, c'est-à-dire l'ensemble des homothétiques de B, compact convexe non vide.

En termes probabilistes on voit que $1-G_x(\lambda)$ est la probabilité conditionnelle que x appartienne à l'ouverture des grains sachant que x est dans les grains. (si l'on appelle A "les grains").

Lorsque A est stationnaire $G_x(\lambda)$ ne dépend pas du point d'appui x et peut s'estimer à partir des données expérimentales connues dans un domaine D selon la formule :

$$(VIII,3) \quad G(\lambda) = 1 - \frac{E[\text{Mes}(A\omega_\lambda \cap D)]}{E[\text{Mes}(A \cap D)]}$$

Cette expression est tout à fait semblable à celle de la version géométrique. Mais l'hypothèse que A est borné n'est plus nécessaire ; elle est même impossible puisque A étant stationnaire est infini.

c - La granulométrie : mesure de la taille des éléments

Deux approches différentes ont conduit à une fonction granulométrique dont les propriétés sont celles d'une fonction de répartition. Il est intéressant d'exhiber la variable aléatoire que $G(\lambda)$ caractérise.

Le concept de taille d'un ensemble n'est défini sans ambiguïté qu'en tant que rapport d'homothétie avec un ensemble de base ayant même forme. Ainsi la granulométrie de sphères ou de cercles n'est autre que la distribution de leurs rayons, rapport d'homothétie sur une figure unité. Une généralisation naturelle est de considérer une famille à un paramètre $\{B_\lambda\}$ et de nommer "taille de A selon B" le λ maximum tel que

L'application ϕ qui à A fait correspondre $\phi_\lambda(A) = \bigcup_{\mu \geq \lambda} A\omega_\mu$ est une granulométrie euclidienne au sens des 6 axiomes précédents. Dans le cas où B est convexe et dans ce cas seulement la réunion $\bigcup_{\mu \geq \lambda} A\omega_\mu$ se réduit au seul terme $A\omega_\lambda$ (car alors $\mu > \lambda \Rightarrow A\omega_\mu \subset A\omega_\lambda$).
Donc pour B convexe :

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{A \cap B(x) \geq \lambda / x \in A\} &= \text{Prob}\{x \in A\omega_\lambda / x \in A\} \\ &= \frac{\text{Mes}(A\omega_\lambda)}{\text{Mes}(A)} = 1 - G(\lambda) \end{aligned}$$

On aboutit à la même expression lorsqu'on suppose A aléatoire stationnaire.

C'est à partir de cette interprétation de la granulométrie in situ que la notion de "taille moyenne" prend un sens géométrique précis.

Plaçons nous à présent sur le terrain plus concret des applications au milieu poreux en examinant les deux cas particuliers importants des granulométries linéaires et circulaires.

I - GRANULOMETRIES LINEAIRES

L'élément structurant est ici un segment de longueur l et de direction α . A désignera un ensemble aléatoire stationnaire, par exemple les pores ; on transposerait sans peine au cas géométrique.

La simplicité de l'élément structurant linéaire fait que toutes les caractéristiques qu'on peut en tirer, et en particulier la granulométrie, sont accessibles à partir du moment fonctionnel $P(l)$: probabilité pour qu'un segment de longueur l (et de direction α) soit inclus dans les pores.

$P(l)$ a toujours un sens directionnel même si, pour alléger les notations, sa direction α n'est pas explicitement mentionnée.

1 - Le moment $P(l)^*$

Selon la formule générale pour l'érosion (II,4) $P(l)$ se calcule dans le domaine expérimental D par la relation :

$$P(l) = \frac{E[\text{Mes}(A \ominus \vec{l}) \cap D]}{\text{Mes } D} = \frac{E[\text{Mes}(A \cap D) \ominus \vec{l}]}{\text{Mes } D}$$

A titre d'illustration la figure 1 représente une plage de DELF 08 et la manière dont elle se transforme par érosion.

$P(l)$ a en général les mêmes propriétés à l'origine que la covariance :

$$P(0) = C(0) = \text{porosité}$$

$$P'(0) = C'(0) \rightarrow \text{surface et périmètre spécifiques, traversée moyenne.}$$

En outre la dérivée seconde à l'origine $P''(0)$ a des propriétés d'indice d'angulosité (cf. Chap. IX).

$P(l)$ est une fonction convexe donc dérivable presque partout et à dérivée croissante. Sa dérivée $-P'(l)$ est proportionnelle au contour apparent de l'érodé $A \ominus \vec{l}$ dans la direction α .

Un raisonnement probabiliste élémentaire montre que la granulométrie G se déduit de $P(l)$ par la relation :

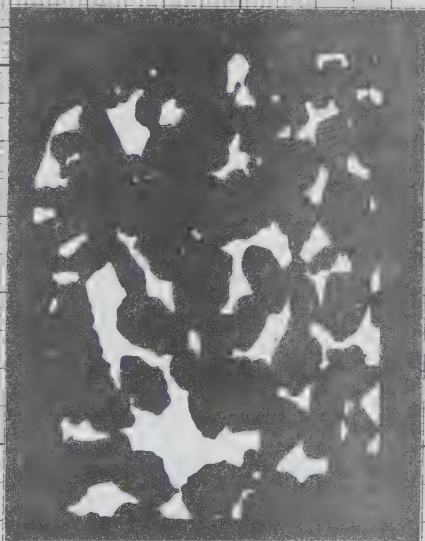
(VIII,4)

$$1 - G(l) = \frac{P(l) - l P'(l)}{P(0)}$$

Géométriquement (VIII,4) s'interprète en remarquant que $1 - G(l)$

* Une convention de notations faisait désigner par la lettre P les moments fonctionnels relatifs aux grains et par Q ceux des pores. Mais comme la plupart des formules des ouvrages de Morphologie Mathématique sont exprimées avec la fonction notée P nous avons préféré garder la même lettre pour faciliter la lecture. On parlera donc du moment $P(l)$ des pores, malgré le caractère inesthétique de la relation $P(0) = q$.

IMAGE INITIALE



P(L)

DELF 8



ÉRODÉS



4

200

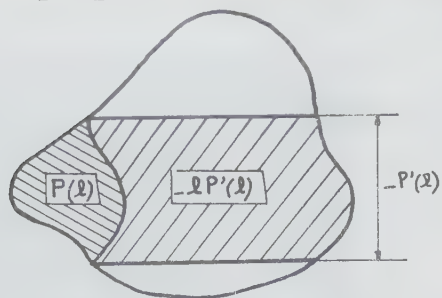
150

100

50

0

est proportionnel à la mesure de l'ouvert $A\omega_1$



- $P(l)$ est proportionnel à $Mes (A \cap \check{l})$
- $l P'(l)$ est proportionnel à ce qui s'ajoute par dilatation.

Fig. 2

$G(l)$ est la fonction de répartition de la "taille selon un segment" c'est-à-dire de la longueur de la traversée de direction α contenant un point x quelconque. Si elle existe la densité de cette loi s'écrit :

(VIII,5)

$$g(l) = \frac{l P'(l)}{P(0)}$$

2 - Granulométrie en nombre et en longueur

De manière étonnante il apparaît que la probabilité d'avoir une traversée de longueur l est proportionnel à cette longueur elle-même.

Afin de comprendre ce résultat il faut réfléchir sur le sens précis de "traversée au hasard". Le fameux paradoxe de BERTRAND* montre bien que pour un même problème il est possible d'envisager plusieurs procédés de tirage au hasard, aussi naturels les uns que les autres, mais qui aboutissent à des probabilités différentes.

Le procédé de tirage de la taille granulométrique consiste sur un champ expérimental D à fixer la position du point x selon la loi uniforme de densité $\frac{1}{Mes(A \cap D)}$ et à en déduire $\Lambda_B(x)$. Lorsque A est constitué de grains homothétiques à B ceci revient à faire intervenir chacun d'eux proportionnellement à leur volume. S'agissant de granulométrie des traversées la fonction $1 - G(l)$ s'interprète très exactement comme suit :

$1 - G(l)$ est la probabilité qu'un point quelconque x de l'ensemble A appartienne à une traversée de longueur supérieure à l .

Mais dans R^n la manière expérimentale usuelle de choisir une traversée de direction α est de choisir son pied selon une densité uniforme

*La probabilité qu'une corde d'un cercle, choisie "au hasard" ait une longueur supérieure à celle du côté du triangle équilatéral inscrit est $\frac{1}{4}$.

dans le sous-espace orthogonal, c'est-à-dire à compter les éléments selon leurs contours apparents (ou plus exactement : leurs variations diamétrales).

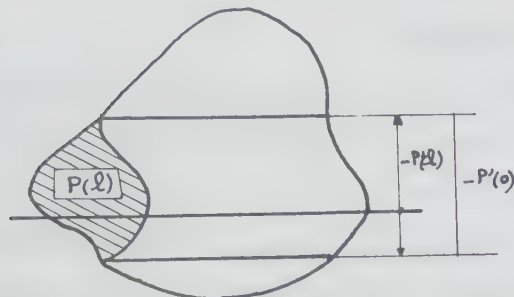


Fig. 3

Une traversée est supérieure à l si et seulement si son pied tombe dans la projection de l'érodé $A \in l$. D'où :

$$(VIII,6) \quad 1 - F(l) = \frac{P'(l)}{P'(0)}$$

$$\text{et } (VIII,7) \quad f(l) = \frac{P''(l)}{-P'(0)}$$

Entre f et g existe la relation :

$$g(l) = \frac{l f(l)}{E(l)} \quad (\text{car } E(l) = \frac{P(0)}{-P'(0)})$$

La granulométrie linéaire $g(l)$ s'obtient en pondérant chaque traversée par sa longueur. (La constante $E(l)$ servant à normer à 1). On exprime ceci en disant que $G(l)$ est la granulométrie en longueur alors que $F(l)$ est la granulométrie en nombre.

Une telle distinction entre granulométries en nombre et en longueur est classique dans la théorie des processus de renouvellement. Elle correspond à l'idée intuitive qu'un point au hasard sur la droite a plus de chance de tomber sur une grande traversée que sur une petite, donc qu'il convient de pondérer par la longueur. Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ on parlera de même de granulométries en mesure. Un tamisage par exemple est toujours exprimé en mesure puisqu'on pèse le produit du tamis.

Expérimentalement la granulométrie prise en mesure a l'avantage d'être beaucoup plus stable que prise en nombre. Une légère abrasion qui créerait une grande quantité de "fines" pourrait modifier considérablement la granulométrie en nombre alors qu'elle laisserait la granulométrie en mesure pratiquement inchangée. Pareillement tous les artéfacts qui peuplent les lames minces influeraient très peu sur la fonction $G(l)$. Le tableau ci-après montre bien que les traversées moyennes en nombre différencient beaucoup moins les morphologies que les

moyennes en mesure. En outre l'estimation numérique de la traversée moyenne, en mesure est plus sûre car elle s'obtient par intégration de $P(l)$ alors que la traversée moyenne en nombre fait intervenir une dérivée de précision incertaine.

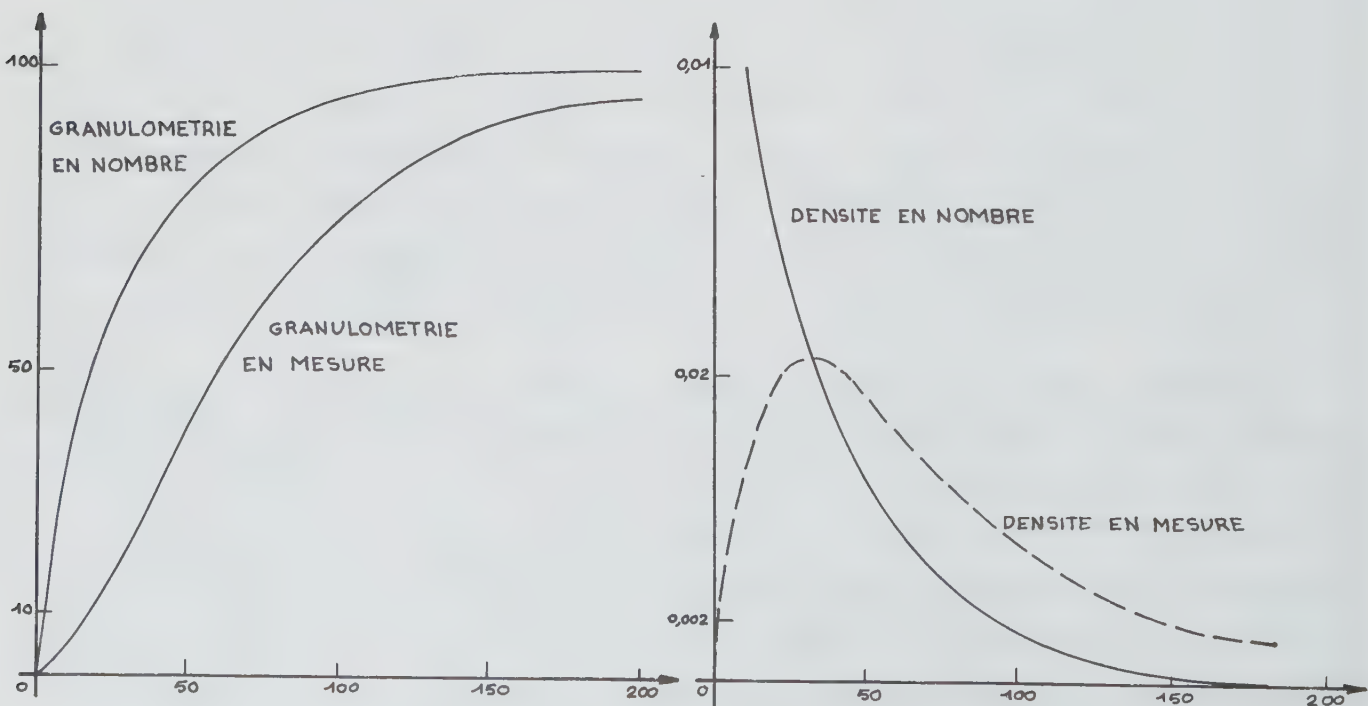
Calcul numérique des fonctions granulométriques

C'est un fait qu'en général la dérivation d'une courbe expérimentale est sujette à caution. Cependant la grande régularité de la fonction $P(l)$ permet de calculer des fonctions de répartition F et G correctes. Pour les densités f et g les résultats sont plus hasardeux, surtout à l'origine, ce qui est fort dommage d'ailleurs, Vu la richesse morphologique de la seule dérivée $P''(0)$ (cf. chapitre IX).

La méthode de calcul est basée sur une interpolation parabolique. Un test de cohérence consiste à intégrer P' à l'aide d'une formule utilisant P'' (règle du trapèze améliorée) et à comparer le résultat à P . L'annexe (III) donne plus de détails sur ce point.

. Exemple : DELF 08

Fig. 5



 *
 * DELF 8 VERTICAL *
 *

PURUSITE: 18.966 % PAS#|C'(0)|: 0.917 %
 SURFACE SPECIFIQUE: 0.0092 MU2/MU3
 TRAVERSEE MOYENNE (EN NB): 30.405 MICRONS

F		F		G		g	
L	P(L)	GRANULOM.		GRANULOM.			
MICRONS	MESURE	EN NOMBRE	DENSITE	EN MESURE	DENSITE		
0.0	18.966	0.0	0.0895	0.0	0.0		
1.47	18.100	11.237	0.0634	0.272	0.0031		
2.94	17.337	18.634	0.0415	0.715	0.0040		
5.68	15.910	25.716	0.0235	1.741	0.0046		
8.82	14.512	32.470	0.0220	3.360	0.0064		
11.76	13.433	38.644	0.0193	5.436	0.0077		
14.70	12.361	44.137	0.0174	7.308	0.0084		
29.41	8.241	62.964	0.0107	20.730	0.0104		
44.11	5.568	75.750	0.0071	35.461	0.0103		
58.82	3.792	83.820	0.0045	48.706	0.0089		
73.52	2.500	89.086	0.0030	59.902	0.0072		
88.22	1.790	92.532	0.0020	58.891	0.0057		
102.93	1.230	94.822	0.0013	75.984	0.0045		
117.63	0.841	96.419	0.0009	81.714	0.0035		
132.34	0.573	97.572	0.0005	86.411	0.0028		
147.04	0.395	98.313	0.0004	89.760	0.0020		
161.74	0.264	98.791	0.0003	92.180	0.0017		
176.45	0.174	99.237	0.0003	94.660	0.0017		

INTEGRALE DE P': 18.301 P(0)-P(NDIM): 18.792
 STAR 1:0.7213E 02 MU E(L): 30.41 MU E(L): 72.13 MU
 STAR 2:0.8200E 04 MU2 D(L): 1268.58 MU2 D(L): 2527.25 MU2
 STAR 3:0.1078E 07 MU3 REL: 1.3/22 REL: 0.5050

CONDITIONS EXPERIMENTALES

NUMBRE DE MANIPULATIONS: 90
 ECLAIRAGE:LUMIERE ULTRA-VIOLETTE
 EXCITATION:BG12 1.5 MIRROR: 2
 OBJECTIF:10.0 TUBE:170.
 OCULAIRE: 2.5

Les moments de la granulométrie se calculent directement à partir de $P(l)$.

Notant $E(L^n)$ les moments en nombre et $\mathcal{H}(L^n)$ les moments en mesure on a :

$$\begin{aligned}
 (VIII,8) \quad E(L) &= \frac{P(0)}{-P'(0)} \\
 E(L^n) &= - \frac{n(n-1)}{P'(0)} \int_0^\infty l^{n-2} P(l) dl \quad n > 1 \\
 \mathcal{H}(L^n) &= \frac{E(L^{n+1})}{E(L)} = \frac{n(n+1)}{P(0)} \int_0^\infty l^{n-1} P(l) dl
 \end{aligned}$$

3 - Etoiles

Les granulométries et leurs moments possèdent une signification directionnelle. En faisant une moyenne sur les directions on obtient des grandeurs morphologiques extrêmement intéressante : les étoiles.

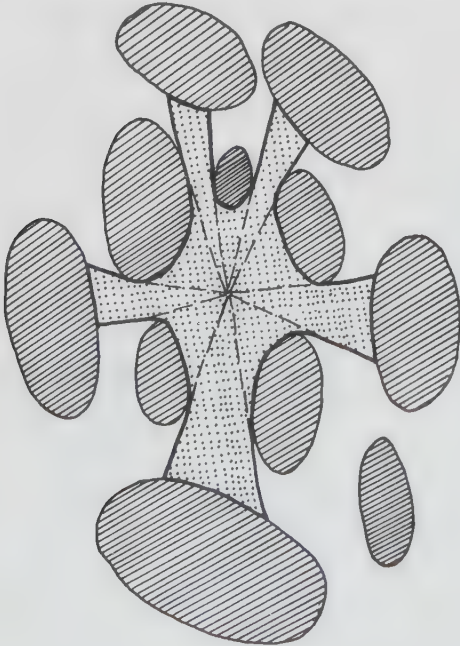


Fig. 6

Sur la figure 6 nous avons associé à un point x des pores l'ensemble des points y des pores tels que le segment (x,y) soit contenu dans ce même milieu : c'est l'étoile de x . Appelons S_x l'aire des pores qui peut être vue directement à partir de x , et $1_{x(y)}$ son indicatrice

$$\begin{cases} 1_{x(y)} = 1 & \text{si } [x,y] \subset \text{pores} \\ 1_{x(y)} = 0 & \text{si } [x,y] \not\subset \text{pores} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 S_x &= \int_{R^2} 1_{x(y)} dy \text{ et } E(S_x) = \int_{R^2} E[1_{x(y)}] dy \\
 &= \int_{R^2} \text{Prob} \{ [x,y] \subset \text{pores} / x \in \text{pores} \} dy
 \end{aligned}$$

(VIII,9)

$$E(S_x) = \frac{1}{P(o)} \int_{R^2} P(y) dy$$

$S^* = E(S_x)$ est indépendante de x puisque le milieu est supposé stationnaire ; sa valeur n'est autre que l'intégrale du moment $P(l)$ dans le plan.

De même :

(VIII,10)

$$V^* = \frac{1}{P(o)} \int_{R^3} P(y) dy$$

est l'étoile à 3 dimensions et à une dimension

(VIII,11)

$$L^* = \frac{1}{P(o)} \int_R P(y) dy$$

coïncide avec le moment en mesure $\mathcal{H}(L)$.

L'étoile fournit un nouvel exemple de caractéristique moyenne obtenue à partir d'une définition ponctuelle, donc libre de toute hypothèse sur l'individualisation des éléments.

Un grain convexe est l'étoile de chacun de ses points et pour une population de grains V^* ou S^* représentent le volume ou la surface en moyenne dans une granulométrie exprimée en mesure, c'est-à-dire $\frac{E(V^2)}{E(V)}$ ou $\frac{E(S^2)}{E(S)}$. Si par un moyen quelconque on pouvait connaître $E(V)$ ou $E(S)$ on connaîtrait du même coup la variance du volume des grains ou de la surface de leurs sections. Un tel paramètre est caractéristique de l'hétérogénéité (ou "classement") d'une population granulométrique.

Pour des grains non convexes, ou des pores, l'étoile est une notion autonome.

De façon plus explicite L^* , S^* et V^* s'écrivent :

(VIII,12)

$$\begin{aligned} L^* &= \mathcal{H}(L) \\ S^* &= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_\alpha(L^2) d\alpha = \frac{\pi}{3} \mathcal{H}(L^2) \\ V^* &= \frac{1}{12} \int_S \mathcal{H}_\omega(L^3) d\omega = \frac{\pi}{3} \mathcal{H}(L^3) \end{aligned}$$

en notant par $\mathcal{N}$ la valeur moyenne de $\mathcal{N}_\alpha$ ou $\mathcal{N}_\omega$ relativement aux directions de l'espace.

Ces étoiles permettent de donner un sens précis au "nombre de pores" par unité de longueur, surface ou volume en posant :

$$N_1 = \frac{q}{L^*} \quad N_2 = \frac{q}{S^*} \quad N_3 = \frac{q}{V^*}$$

Il est commode de prendre le millimètre comme unité de longueur.

Bien entendu ces nombres n'apportent aucune information nouvelle par rapport à la porosité et les étoiles. Ils rendent compte d'une densité de pores.

a - Valeurs expérimentales

Voici les résultats des mesures sur les échantillons DELF

DELF	E(L) μ	L* μ	S* 10 ² μ ²	V* 10 ⁴ μ ³	N ₁ /mm	N ₂ /mm ²	N ₃ /mm ³	pore max. μ	a ₁ port. int. μ	port. gst μ	poro- sité %
01	36	67	67	79	1,37	13,7	116	100	81	150	9,2
02	69	138	286	684	1,8	8,5	35	200	75	120	24,3
03	23	55	47,5	49,8	2,1	24,1	230	80	75	330	11,4
04	67	143	323	858	0,8	3,5	13	200	126	500	11,2
05	19	65	75,3	104	1,73	14,9	108	110	99	500	11,2
07	12	38	24	19	2,1	34	430	60	39	>200	8,2
08	30	72	82	108	2,6	23	175	110	64	200	19
11	26	82	109	166	2,9	21,6	142	140	> 78	>220	23,6
12	30	97	157	305	0,9	5,7	29	150	118	500	8,9
14	33	193	715	3152	0,4	1,1	2,5	350	> 277	>700	7,8
18	33	119	256	676	0,6	2,9	11	200	208	700	7,5
19	31	80	128	252	0,15	0,9	4,8	140	112	250	1,2
20	49	140	317	842	0,5	2,3	8,8	150	154	270	7,4

Tableau 7

Le pore maximum a été calculé de manière à ce que $P(L \text{ max}) = 0,05 P(0)$

b) Commentaires

Ces diverses grandeurs caractérisent la morphologie du réseau poreux du point de vue de la taille et de l'agencement. Ainsi constate-t-on que des milieux à porosités semblables peuvent différer considérablement par la granulométrie et la disposition des pores. DELF 3, 4 et 5 par exemple ont une porosité de 11 % environ mais le volume moyen d'un pore de DELF 4 est huit fois supérieur à celui de DELF 5, lui-même double de celui de DELF 3. Les portées-intégrales a_1 se rangent dans l'ordre inverse. Quant à la dispersion relative $\frac{\sigma^2}{E(L)^2} = \frac{L^*}{E(L)} - 1$, qui est un indice de classement, on trouve :

DELF 3	DELF 4	DELF 5
1,39	1,13	2,42

La granulométrie des traversées de DELF 5 est relativement plus dispersée que les autres.

De la même façon on peut différencier DELF 14, 18 et 20 dont la porosité est 7,5 %. DELF 14 tranche nettement par la taille de ses pores ; En revanche DELF 18 et 20 sont assez voisins du point de vue granulométrique, ce qui pourrait surprendre vu l'extrême différence de leurs morphologies. La porosité de DELF 20 est de type interoolithique alors que celle de DELF 18 provient des cavités poreuses de fossiles divers (bryozoaires, polypiers, échinodermes, gastéropodes) dont la taille est de l'ordre du mm. Mais ces cavités sont morcelées et leurs traversées par conséquent plus petites. La portée géostatistique de 700 μ traduit la structure à l'échelle du fossile et rétablit la différenciation d'avec DELF 20 (portée de 270 μ).

On peut tirer du tableau 7 toutes sortes d'indications de ce genre, surtout en observant parallèlement les échantillons. Mais pour ne pas allonger ce texte démesurément nous allons concentrer notre attention sur un point : la comparaison de l'étoile linéaire et de la portée-intégrale.

4 - Comparaison entre étoile et portée

Il ressort tout d'abord que L^* et a_1 sont du même ordre de grandeur avec, généralement, $a_1 > L_1$ sauf pour DELF 02, 04, 08 et 11.

Or il se trouve précisément que ce sont les échantillons dont la perméabilité est la plus forte. Cela vaut la peine d'y regarder de plus près.

La théorie prévoit un lien entre l'étoile et la portée dans l'hypothèse où les traversées des grains et des pores qui se succèdent le long d'une droite sont des variables aléatoires indépendantes. Elles constituent alors un processus de renouvellement à deux états dont la portée est :

(VIII,13)

$$a_r = p \frac{D^2(L_0)}{E(L_0)} + q \frac{D^2(L_1)}{E(L_1)}$$

q : teneur en pores : porosité
 p : teneur en grains = 1 - q
 $D^2(L_0), E(L_0)$: variance et moyenne en nombre des traversées de pores
 $D^2(L_1), E(L_1)$: variance et moyenne en nombre des traversées de grains

Cette relation s'écrit aussi :

(VIII,14)

$$a_r = p[\mathcal{M}(L_0) - E(L_0)] + q[\mathcal{M}(L_1) - E(L_1)]$$

faisant apparaître la différence entre les moyenne en longueur et en nombre.

Lorsque la granulométrie des pores est exponentielle la portée prend la forme très simple :

(VIII,15)

$$a_r = q \mathcal{M}(L_1) = q L_1^*$$

La portée a_r donnée par la formule (VIII,13) joue le rôle de valeur critique :

- si la portée expérimentale a dépassé a_r il existe une structure hypergranulométrique, c'est-à-dire mettant en jeu plusieurs grains (ou pores).
- si a est inférieur à a_r il y a effet compensateur (cf. "effet de trou").

C'est donc a_r et non pas L_0^* qui devrait servir de référence. L'inconvénient est que le calcul de a_r implique la connaissance de la granulométrie des grains. (tout ce qui n'est pas pores). Il faut la mesurer : cela prend du temps pour obtenir finalement des résultats généralement peu convaincants car la taille maximale de l'élément structurant est loin d'atteindre les plus grandes traversées de grains. On aboutit de la sorte à une étoile des grains L_1^* extrêmement sous-estimée.

Voici les valeurs de a_r calculées quand cela a été possible :

	a_r (μ)	a_1 (μ)
DELF 02	82	75
DELF 07	≥ 36	61
DELF 08	≈ 66	64
DELF 11	≈ 76	> 78

Tableau 8

DELF 07 possède une structure hypergranulométrique, comme le confirme une portée géostatistique très grande devant la taille moyenne des pores.

En revanche pour DELF 02 et 08 la portée expérimentale est inférieure à a_r^* pour DELF 11 elle lui est à peu près égale ; quant à DELF 04, en faisant l'hypothèse d'une répartition exponentielle des traversées de grains on trouve $a_r = (1-q)L_0^* = 127 \mu$ c'est-à-dire la valeur expérimentale a_1 .

L'explication de ces résultats réside en le fait que les quatre échantillons DELF 02, 04, 08 et 11 présentent des pores d'assez grande taille organisés en réseau.

Il faudrait à présent de nombreuses mesures expérimentales pour établir si le fait que la portée est supérieure à l'étoile renseigne valablement sur les qualités de perméabilité du milieu.

* Les covariances présentent d'ailleurs un très léger effet de trou.

5 - Ajustement des fonctions granulométriques

Un pas supplémentaire serait franchi si l'on pouvait assigner aux courbes granulométriques un modèle théorique, de préférence possédant un sens physique. Sous un aspect particulier on retrouve la nécessité d'un modèle génétique.

Quelques remarques un peu techniques figurent dans les annexes (V). Nous nous limiterons ici à deux lois : la loi Lognormale et la loi exponentielle.

a - Loi lognormale

Sur la série DELF la granulométrie des traversées de pores n'est pas lognormale.

On connaît la prétendue universalité de la loi Lognormale pour les granulométries de grains ou de blocs. Pourtant un critère simple montre qu'elle n'intervient pas ici : si la loi était Lognormale la variance relative $\frac{\sigma^2}{m^2}$ serait la même dans la granulométrie prise en nombre ou en longueur. (cf. Annexe IV) Or sur les milieux étudiés la pondération de la fréquence par x (passage de la loi en nombre à la loi en longueur) s'accompagne toujours d'une diminution de la variance relative. Ceci réfute la Lognormalité.

$$r_n = \text{variance relative en nombre} = \frac{E(L^2) - [E(L)]^2}{[E(L)]^2} = \frac{\mathcal{M}(L)}{(L)} - 1$$

$$r_l = \text{" " "longueur} = \frac{E(L^2) - [\mathcal{M}(L)]^2}{[\mathcal{M}(L)]^2}$$

DELF	01	02	03	04	05	07	08
r_n	0,857	0,998	1,422	1,122	2,477	2,128	1,372
r_l	0,422	0,437	0,497	0,498	0,710	0,648	0,505
	11	12	14	18	19	20	
r_n	2,131	2,287	4,925	2,649	1,561	1,823	
r_l	0,554	0,527	0,384	0,415	0,415	0,415	

b - Loi exponentielle - Critère d'appréciation

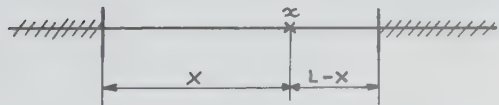
D'apparence les moments $P(1)$ des pores de DELF ont une allure exponentielle. Il est intéressant de chiffrer rapidement, sans ajustement graphique, ce caractère plus ou moins exponentiel.

On sait que la loi exponentielle est liée à la propriété markovienne d'indépendance conditionnelle du passé et du futur lorsque le présent est connu. Définie classiquement sur la droite, où il existe une relation d'ordre, la propriété de Markov a été généralisée en propriété semi-markovienne (cf.[1]).

"Etant donnés 3 ensembles de points E_1 , E_2 et C , on dit que C "sépare" E_1 et E_2 si tout segment de droite $[x,y]$ joignant un point x de E_1 et un point y de E_2 rencontre C en un point au moins (situés entre x et y). On dit qu'un ensemble aléatoire A est semi-markovien si, quels que soient les ensembles E_1 , E_2 et C séparant E_1 et E_2 , il y a indépendance conditionnelle entre tout événement intéressant E_1 et tout événement intéressant E_2 , lorsqu'on sait que C est contenu dans les pores A^C ." Les schémas booléens à grains primaires convexes sont semi-markoviens. Il est clair que les ensembles semi-markoviens par rapport aux pores, c'est-à-dire où les pores jouent le rôle de l'ensemble séparant C , possèdent des pores à granulométries des traversées exponentielles.

Sans aller jusqu'à tester l'indépendance conditionnelle sur la droite on peut du moins apprécier la corrélation entre les traversées situées à gauche et les traversées situées à droite d'un point quelconque x des pores.

Soit L une traversée des pores dans la direction α .



X : "traversée antérieure" :
distance entre x et le point
des grains le plus proche situé
à sa gauche

$L-X$: "traversée résiduelle"
définition analogue.

Le point x étant situé au hasard sur le segment avec la densité uniforme $\frac{1}{L}$:

$$E[X(L-X)] = \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{3} = \frac{L^2}{6}$$

$$E(X) = E(L-X) = \frac{L}{2}$$

$$E(X^2) = \frac{L^2}{3} = E(L-X)^2$$

En déconditionnant par rapport à la longueur L de densité $dG(L)$ on écrit le coefficient de corrélation entre traversées antérieures et traversées résiduelles :

$$\rho_\alpha = \frac{E[X(L-X)] - E(X) E(L-X)}{\sqrt{E(X^2) - E^2(X)} \sqrt{E(L-X)^2 - E^2(L-X)}} = \frac{\frac{1}{6} \int L^2 dG(L) - [\frac{1}{2} \int L dG(L)]^2}{\frac{1}{3} \int L^2 dG(L) - [\frac{1}{2} \int L dG(L)]^2}$$

Pour alléger les notations désignons respectivement par m_1 , m_2 et σ^2 les moments d'ordre 1 et 2 et la variance de la granulométrie (en mesure) $G(L)$:

$$(VIII,16) \quad \rho_\alpha = \frac{m_2 - \frac{3}{2} m_1^2}{2m_2 - \frac{3}{2} m_1^2} = \frac{\sigma^2 - \frac{m_1^2}{2}}{2\sigma^2 + \frac{m_1^2}{2}}$$

ρ_α a une signification directionnelle. Lorsque le milieu est isotrope :

$$S^* = \frac{\pi}{3} \mathcal{M}(L^2) = \frac{\pi}{3} m_2 \text{ et } L^* = \mathcal{M}(L) = m_1$$

d'où :

$$(VIII,17) \quad \rho = \frac{S^* - \frac{\pi}{2} (L^*)^2}{2S^* - \frac{\pi}{2} (L^*)^2}$$

A l'aide du tableau 7 on peut calculer ρ pour les lames DELF :

	S^* $10 \mu^2$	$\frac{\pi}{2} (L^*)^2$ $10^2 \mu^2$	ρ
DELF 01	67	70,5	- 0,055
DELF 02	286	299,1	- 0,048
DELF 03	47,5	47,5	0
DELF 04	323	321,2	0,005
DELF 05	75,3	66,4	0,106
DELF 07	24	22,1	0,074
DELF 08	82	81,4	0,007
DELF 11	109	105,6	0,030
DELF 12	157	147,8	0,055
DELF 14	715	585,1	0,154
DELF 18	256	222,4	0,116
DELF 19	128	100,5	0,177
DELF 20	317	307,9	0,028

Tableau 10

Compte tenu de la précision des calculs la ressemblance entre S^* et $\frac{\pi}{2}(L^*)^2$ est tout à fait étonnante. La corrélation est quasiment nulle sauf pour DELF 5, 14, 18 et 19 où elle est positive : en moyenne quand la traversée antérieure est grande la traversée résiduelle l'est aussi. Cette propriété ne va pas de soi car pour un milieu à granulométrie très peu dispersée le fait d'avoir une traversée antérieure importante implique que la traversée résiduelle soit petite.

En pratique il ne sera pas nécessaire de calculer ρ car la variance relative de la granulométrie en longueur contient la même information. En effet :

$$r_c = \frac{\sigma^2}{m_1^2} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\sigma^2 - \frac{m_1^2}{2}}{2\sigma^2 + m_1^2} \quad \text{impliquent}$$

(VIII,18)

$$\rho = \frac{r_1 - \frac{1}{2}}{2r_1 + \frac{1}{2}}$$

Comparer ρ à 0 équivaut à comparer r_1 à $\frac{1}{2}$, qui n'est autre que la variance relative de la loi gamma d'ordre 2, pondérée par 1 de la loi exponentielle $\lambda e^{-\lambda l}$. Le tableau 9 montre d'ailleurs que la variance relative r_1 est plus proche de 0,5 que la variance relative en nombre r_n n'est proche de 1, valeur théorique pour la loi exponentielle. Mais r_n met en jeu la moyenne en nombre $E(L)$ dont on a vu qu'elle est d'une précision douteuse.

III - GRANULOMETRIES SELON UNE BOULE

L'élément structurant linéaire est anisotrope et mesure une granulométrie qui dépend de l'orientation du milieu. Si l'on désire au contraire une fonction indépendante de l'orientation il faut opérer avec un élément structurant isotrope : la boule (sphère ou cercle).

Le cercle et la sphère sont en vérité des figures privilégiées. En géométrie intégrale ils permettent d'introduire les "ensembles parallèles" utilisés par MINKOWSKI pour définir la longueur d'une courbe ou la surface d'un solide. Dans nombre de problèmes concrets il semble que ces éléments structurants appréhendent mieux que d'autres la morphologie étudiée. C'est le cas pour les milieux poreux où l'on a vu que la granulométrie linéaire n'est pas toujours suffisamment caractéristique. De plus, un modèle de G. MATHERON dont on a parlé au chapitre I donne l'espoir de mettre en rapport la perméabilité avec une fonction tirée de l'élément structurant sphérique : la loi du premier point de contact

1 - Loi du premier point de contact

Tout comme pour le moment $P(1)$ on peut définir la probabilité que la boule de rayon r soit contenue dans les pores :

$$P(B_r) = \text{Prob}\{B_r \subset \text{pores}\}$$

C'est aussi, bien sûr, la probabilité qu'un point x quelconque appartienne à l'érodé $A \ominus B_r$.

Soit x un point situé dans les pores et R la distance du point des grains le plus proche de x , c'est-à-dire la distance du point de rencontre avec les grains d'une famille de boules de rayons croissants, centrées en x^* .



Fig. 11

La loi $1-F$ de cette distance est la probabilité conditionnelle pour que R soit supérieur à r lorsque x est dans les pores.

(VIII,19)

$$1 - F(r) = \frac{P(B_r)}{P(o)}$$

$F(r)$ est nommée "loi du premier point de contact". Elle possède des propriétés très riches. Par exemple la dérivée à l'origine de $P(B_r)$ est égale à la surface spécifique. On montre de même le développement à l'origine de $F(r)$ a des coefficients qui dépendent du nombre de grains et de leurs contacts [8]. Les moments de $F(r)$ vérifient une majoration ayant le sens d'une inégalité isopérimétrique^{**}.

Mais surtout le moment d'ordre deux, auquel on peut donner le caractère tensoriel en considérant la loi du vecteur joignant x au point de contact, est en relation théorique avec la perméabilité dans le cas de canaux cylindriques disjoints, de rayons et d'orientation quelconques. Très précisément dans le cas isotrope :

(VIII,20)

$$K = \frac{q E(R^2)}{24}$$

Le produit $q E(R^2)$ est sur la droite égal à $\frac{q \mathcal{H}(L^2)}{3}$ ou $\mathcal{H}(L^2)$ désigne comme d'habitude le moment d'ordre deux en mesure de la granulométrie linéaire des pores. En effet sur R^1 la boule est un segment et la loi du premier point de contact n'est autre que $\frac{P(1)}{P(o)}$. Alors

* En topologie R s'appellerait : la "distance au complémentaire".

** De tous les ensembles possibles la sphère possède à volume donné la surface minimale : d'où une inégalité pour les autres figures.

$$E(R^2) = 2 \int_0^\infty r(1-F(r))dr = 2 \int_0^\infty r \frac{P(r)}{P(0)} dr = \frac{\mathcal{M}(L^2)}{3}$$

(Dans le cas isotrope $E(R^2) = \frac{S^*}{\pi}$)

Ainsi le produit $q \mathcal{M}(L^2)$, qui possède bien le caractère tensoriel, pourrait être corrélé à la perméabilité.

D'ailleurs dans un cas simple, celui où la granulométrie linéaire des pores est exponentielle on retrouve la formule de KOZENY-CARMAN.

$$P(l) = q e^{-\lambda l} \rightarrow \mathcal{M}(L^2) = \frac{6}{\lambda^2}$$

$$P'(0) = -\lambda q = \frac{\sigma}{4} \quad (\sigma : \text{surface spécifique})$$

d'où $\mathcal{M}(L^2) = 96 \frac{q^2}{\sigma^2}$ et si l'on suppose la proportionnalité de K à $q E(R^2)$ on obtient :

(VIII,21)

$$K = C \frac{q^3}{\sigma^2}$$

C = constante

ce qui est exactement la forme (I,2') de la formule de KOZENY-CARMAN.

2 - Granulométrie selon une sphère

La loi du premier point de contact $F(r)$ est bien une fonction de répartition, mais pas granulométrique car l'érosion ne vérifie pas l'axiome 4 des granulométries :

$$(A \ominus \check{B}_\lambda) \ominus \check{B}_\mu = A \ominus \check{B}_{\lambda+\mu} \neq A \ominus \check{B}_{\sup(\lambda,\mu)}$$

Dans R^3 elle représente la loi de la plus grande sphère centrée en x et incluse dans les pores. La granulométrie pour sa part est la loi de la plus grande sphère contenant x et incluse dans les pores.

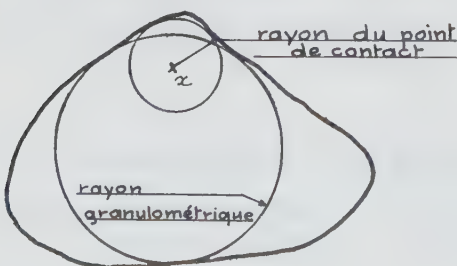
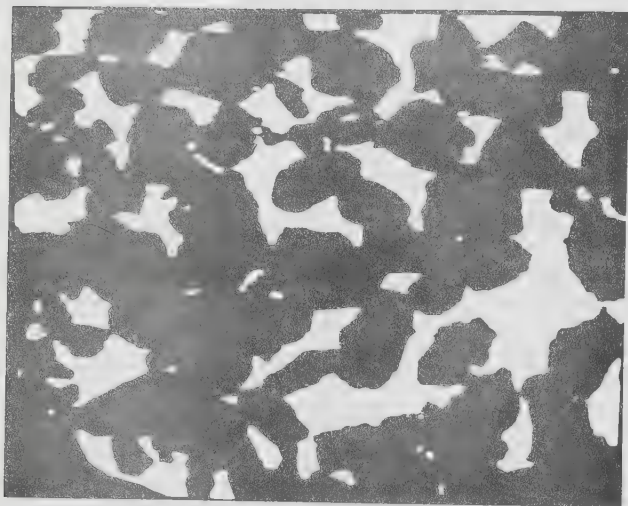


Fig. 12

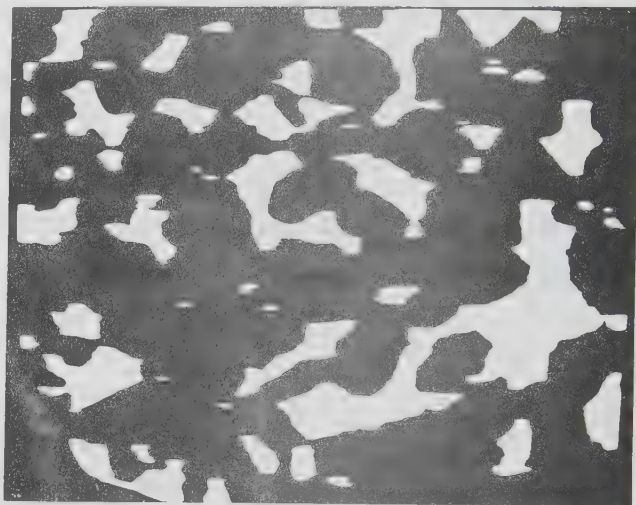
Ses trois premiers moments sont proportionnels au rayon moyen, surface moyenne et volume moyen de cette sphère. En ce sens il est possible de parler sans ambiguïté de caractéristiques moyennes des pores.



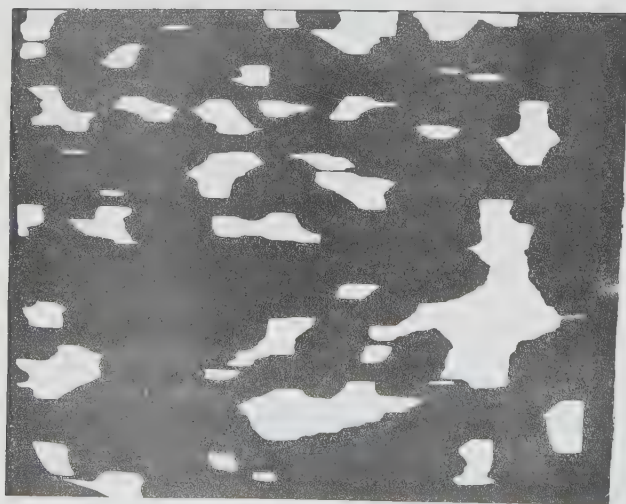
OUVERTURES LINEAIRES



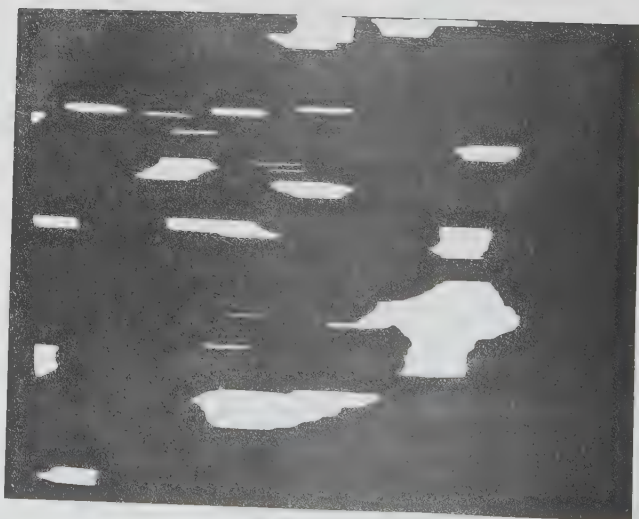
1



2



3



4

OUVERTURES HEXAGONALES



1



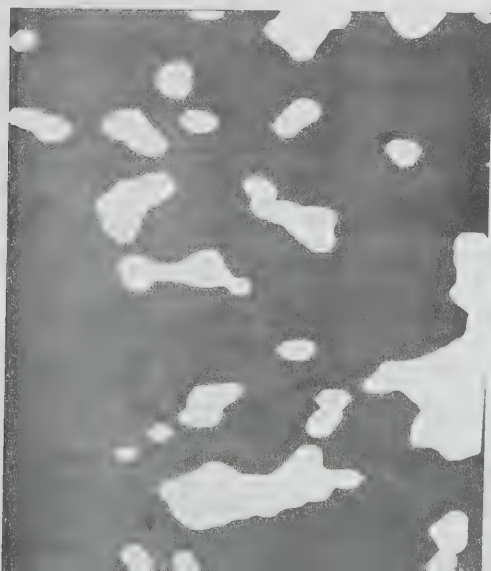
2



3



4

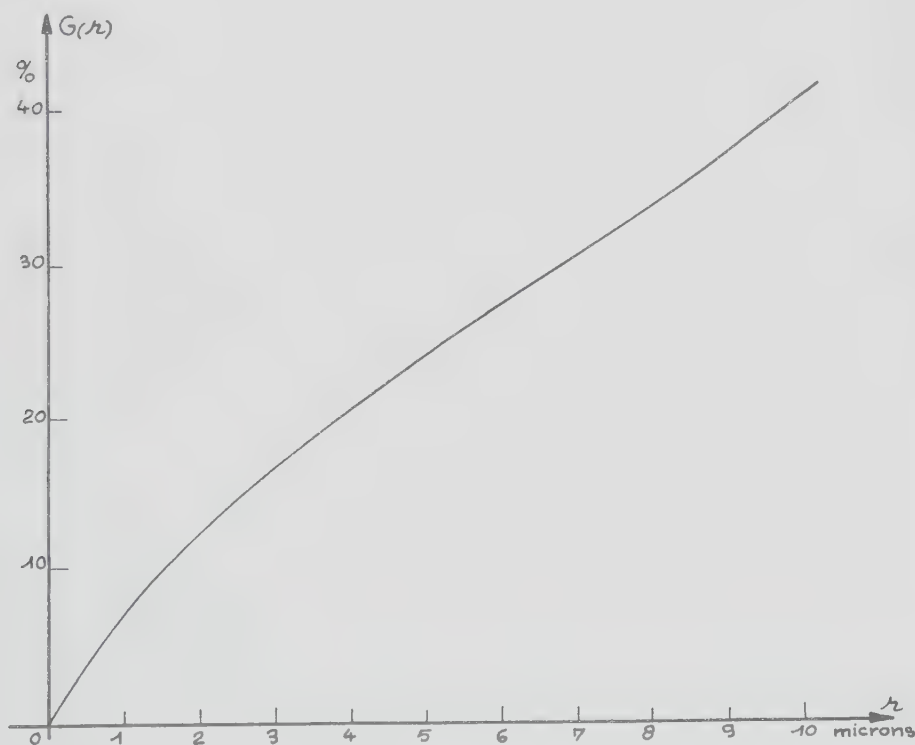


En plaques minces on mesure les granulométries selon un cercle. Il n'est pas possible d'en déduire théoriquement la granulométrie selon une sphère car l'ouverture de la section plane n'est pas égale à la section plane de l'ouverture. Néanmoins l'expérience des granulométries de poudres [13] montre qu'avec un peu d'habitude on peut rapprocher les courbes de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Expérimentalement le cercle est approché par un hexagone. Des calculs prouvent que l'approximation est tout à fait excellente lorsqu'on considère que l'hexagone représente le cercle de même périmètre ; son rayon est alors $\rho = 0,955 a$ où a désigne le côté de l'hexagone.

Le montage du bloc "érosions et ouvertures hexagonales" est en cours de réalisation et l'on ne dispose pour le moment que de 4 tailles d'hexagones, le plus grand n'ayant que 8 pas de côté.

Voici tout de même les résultats d'une mesure sur DELF 08 :



Une application immédiate de l'ouverture hexagonale serait de lui faire jouer le rôle de la méthode de coloration à deux résines en assimilant le volume envahi par la résine bleue (représentant l'huile) à une ouverture selon un cercle. Il s'agit exactement du même raisonnement que lors de la comparaison des mesures de porosité et il s'expose aux mêmes objections sur la différence entre un envahissement progressif et un "envahissement en place".

Une autre application est la mesure de la sphéricité, question

MORPHOMETRIE

=====

Les deux chapitres suivants sont un peu à part pour l'instant car ils ne sont pas encore étayés par des mesures expérimentales. Dans le cas du chapitre IX, qui analyse le contenu morphologique de la dérivée à l'origine de la granulométrie linéaire, la raison est la difficulté d'estimer numériquement la dérivée seconde et à fortiori tierce d'une courbe connue par points. Pour le chapitre X ce n'est qu'une question de temps : les érosions et ouvertures hexagonales permettront d'atteindre de nouveaux indices de formes caractéristiques de la rondeur et de la sphéricité.

CHAPITRE NEUF

COMPOTEMENT A L'ORIGINE DE LA GRANULOMETRIE LINEAIRE

Le comportement au voisinage de l'origine de la granulométrie linéaire (en nombre) est lié en général à la régularité du contour du milieu considéré : existence locale de rayons de courbure, d'angles à bords rectilignes, de points anguleux, de points de rebroussement. Ceci suppose que les traversées soient effectivement petites en regard des dimensions du constituant lui-même : elles n'intéressent alors que sa périphérie. Ce n'est pas le cas lorsque les traversées sont de l'ordre de grandeur de la structure : petits grains par exemple.

Pour situer la question fixons nous une traversée de longueur petite soit l et supposons tout d'abord que le milieu ne comporte ni isthme étroit, ni extrémité anguleuse, ni grain petit devant l (fig. 1) mais uniquement des terminaisons arrondies possédant un rayon de courbure R assez grand devant l (fig. 2).



Fig. 1

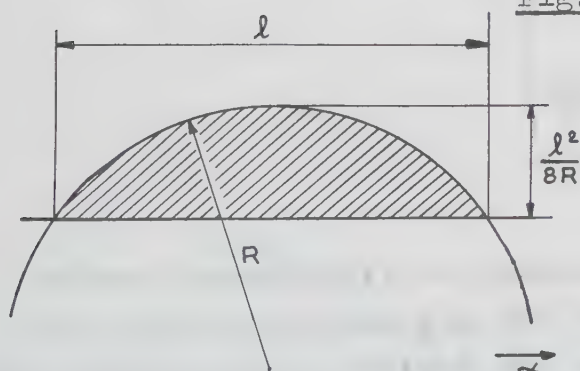


Fig. 2

Une droite de direction α coupe le grain. Pour que la traversée soit inférieure à l il faut et il suffit que la sécante coupe le grain à l'intérieur de la calotte hachurée.

Le contour apparent "utile" offert à la droite est la flèche de l'arc de cercle sous-tendu par la corde de longueur l ; sa longueur est $\frac{l^2}{8R}$. Si $v_1(\alpha)$ est le nombre moyen par unité de surface de ces terminaisons arrondies observées dans la direction α , le contour apparent total offert en moyenne par unité de surface aux traversées de longueur inférieure à l est $v_1(\alpha) \frac{l^2}{8} E(1/R)$. Or ce contour apparent est aussi égal à :

$$\underbrace{[-P'_\alpha(0)]}_{\text{contour apparent total}} = \underbrace{[-P'_\alpha(l)]}_{\text{contour apparent offert aux traversées supérieures à } l}$$

soit $[-P'_\alpha(0)]F(1)$ où $F(1)$ est la granulométrie en nombre (puisque $1-F(1) = \frac{P'_\alpha(l)}{P'_\alpha(0)}$ par définition).

D'où l'égalité :

$$(IX,1) \quad \boxed{[-P'_\alpha(0)] F_\alpha(1) = v_1(\alpha) \frac{l^2}{8} E\left(\frac{1}{R}\right)}$$

Si f est la densité de F , qui existe forcément au voisinage de l'origine d'après (IX,1), on a :

$$(IX,2) \quad \boxed{\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= - \frac{v_1(\alpha)}{4P'_\alpha(0)} E\left(\frac{1}{R}\right) \end{aligned}}$$

Ainsi lorsque dans une direction donnée les frontières possèdent en tout point une courbure, la densité de la granulométrie des traversées est nulle à l'origine et admet une dérivée proportionnelle à la courbure moyenne.

En général les milieux poreux ne satisfont pas ces conditions de régularité. Dans un ciment cristallin les pores ont pour faces celles des cristaux de ciment : dans l'espace ce sont des polyèdres et dans le plan des polygones (fig. 3). Dans les zones de contact entre des grains pseudo-sphériques l'espace poreux forme des pics acérés qui, en termes

de géométrie analytique, constituent pour la frontière des points de rebroussement (fig. 4). Ces deux types, cristallin et intergranulaire, peuvent d'ailleurs coexister : Les porès sont dans le ciment et en contact avec les grains. (fig. 5)

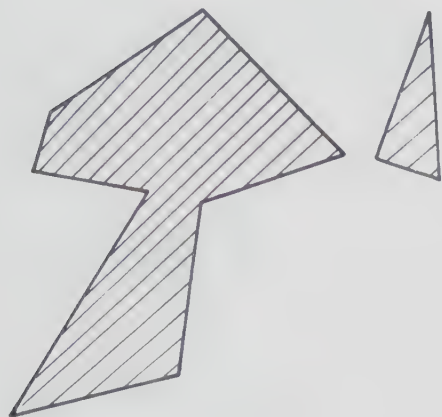


Fig. 3

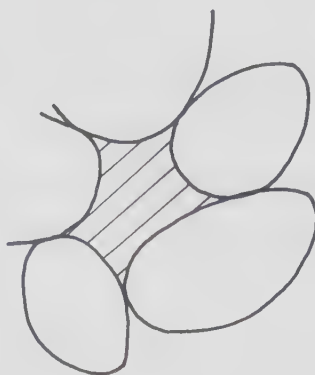


Fig. 4

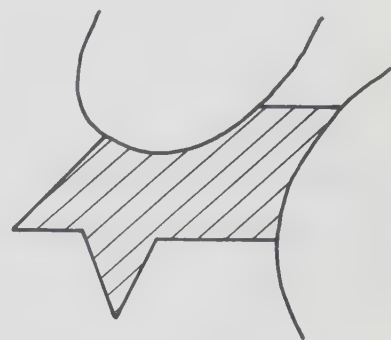


Fig. 5

Une porosité d'origine bioclastique présente toute une dentelle périphérique à courbures très faibles ce qui équivaut pour les traversées à une multitude de petits grains (fig. 6).

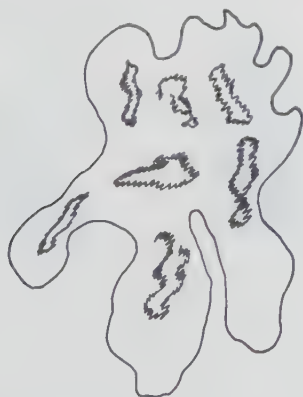


Fig. 6



Fig. 7



Fig. 8

On trouve aussi des porosités de type punctiforme dans les argiles (fig. 7). Dans un milieu poreux de type réseau les pores communiquent entre eux par des canaux (fig. 8). Tout ceci équivaut à la présence d'angulosités, de petits grains et d'isthmes.

Ainsi les hypothèses de la formule (IX,2) ne sont en général pas satisfaites et il n'est pas possible de mesurer une courbure moyenne de cette façon. En outre la détermination de $f(0)$ et $f'(0)$ à partir de valeurs expérimentales est extrêmement délicate, sinon illusoire :

$$f(0) = \frac{P''(0)}{-P'(0)} \text{ et } f'(0) = \frac{P'''(0)}{-P'(0)} ; \text{ or les dérivées premières et}$$

a fortiori secondes et tierces s'estiment assez mal à partir de valeurs expérimentales, surtout à l'origine où toute l'information réside à droite du point. Mais on peut dans certains cas prévoir le comportement théorique de la densité $f(l)$ et un modèle qui la représenterait devrait posséder la même allure à l'origine. Il serait par exemple incohérent d'ajuster la granulométrie des traversées de pores tous anguleux à une loi gamma d'ordre supérieur à 1.

Pour nous faire une idée du comportement de $f(0)$ et $f'(0)$ en général examinons les cas qui ont été volontairement écartés jusqu'ici : angles, isthmes, petits grains.

1 - Angles

On peut imaginer toutes sortes d'extrémités anguleuses. Voici quelques exemples.

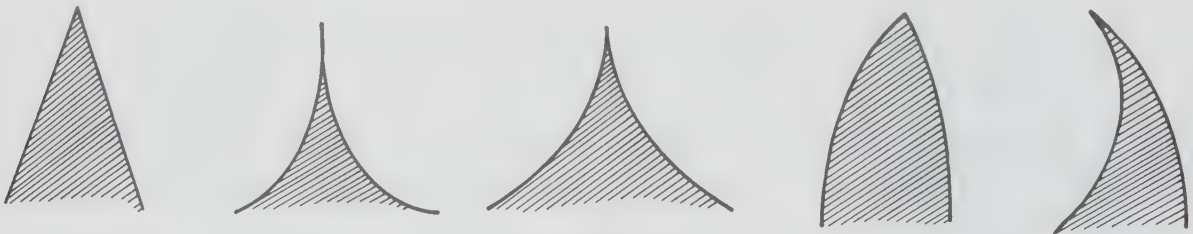
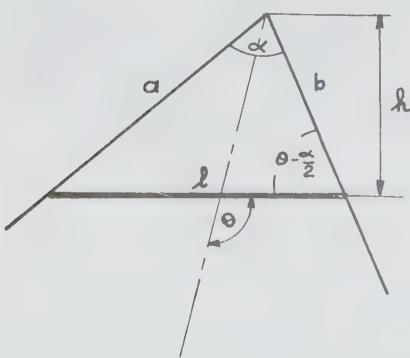


Fig. 9

Traisons ici le cas des angles à bords rectilignes. A titre indicatif on trouvera en Annexes () des résultats relatifs aux angles curvilignes.



Soient α l'angle de la terminaison anguleuse et θ l'angle de sa bissectrice avec la direction de la sécante.

$$\text{Nécessairement } \frac{\alpha}{2} < \theta < \pi - \frac{\alpha}{2}$$

Si les côtés de l'angle sont assez longs le contour apparent offert aux traversées de longueur inférieure à l est la hauteur h du triangle abc .

On a : $h = b \sin(\theta - \frac{\alpha}{2})$ et dans le triangle abc

$$\frac{l}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin(\theta - \frac{\alpha}{2})} = \frac{b}{\sin(\theta + \frac{\alpha}{2})}$$

$$\text{donc } h = \frac{l}{\sin \alpha} \sin(\theta + \frac{\alpha}{2}) \sin(\theta - \frac{\alpha}{2}) = \frac{l}{2 \sin \alpha} [\cos \alpha - \cos 2\theta]$$

Considérons une population de tels angles de fonction de répartition $F_1(d\alpha)$. La direction u des sécantes est fixée et l'on suppose les côtés des angles suffisamment longs pour qu'une traversée de longueur l soit effectivement possible.

Le contour apparent total offert aux traversées de longueur inférieure à l est :

$$\int_0^\pi F_1(d\alpha) \int_{\alpha/2}^{\pi-\alpha/2} \frac{1}{2} [\cotg \alpha - \frac{\cos 2\theta}{\sin \alpha}] F[d\theta/\alpha]$$

où $F[d\theta/\alpha]$ est la loi conditionnelle de θ à α fixé.

Donc si $v(u)$ est le nombre d'angles dans la direction u :

$$[-P'u(o)] F(l) = v(u) \frac{1}{2} \times K \quad \text{avec}$$

$$K = \int_0^\pi F_1(d\alpha) \int_{\alpha/2}^{\pi-\alpha/2} [\cotg \alpha - \frac{\cos 2\theta}{\sin \alpha}] F(d\theta/\alpha). \text{ Si } P'_u(o) \text{ est fini } K$$

l est aussi car K est indépendant de l et le produit Kl s'annule en $l = 0$. D'où :

(IX,3)

$$\begin{aligned} f(o) &= - \frac{v(u)}{2 P'_u(o)} K \\ f'(o) &= 0 \end{aligned}$$

|| La densité de la granulométrie linéaire d'éléments polygonaux admet à l'origine une valeur finie et une dérivée nulle.

Moyennant une hypothèse assez plausible on peut expliciter la constante K. Cette hypothèse est que les bissectrices des angles sont orientées de manière uniforme sur le demi-cercle : le milieu est isotrope. Dans ce cas la loi conditionnelle $F(d\theta/\alpha)$ est la loi uniforme de densité $\frac{1}{\pi-\alpha}$.

$$K = \int_0^\pi F_1(d\alpha) \int_{\alpha/2}^{\pi-\alpha/2} \left[\cotg \alpha - \frac{\cos 2\theta}{\sin \alpha} \right] \frac{d\theta}{\pi-\alpha} = \int_0^\pi F_1(d\alpha) \left[\cotg \alpha + \frac{1}{\pi-\alpha} \right]$$

(IX,4)

$$K = E_\alpha \left[\frac{1}{\pi-\alpha} + \cotg \alpha \right]$$

Ceci montre en passant que l'interprétation géométrique de $f(o)$ n'est pas simple. Tout au plus on peut remarquer que la fonction $\frac{1}{\pi-\alpha} + \cotg \alpha$ est monotone décroissante et que plus les petits angles sont nombreux plus K, donc $f(o)$, sont grands.

2 - Isthmes

Si les isthmes ont une épaisseur minimale e non nulle pour $l < e$ la contribution des isthmes au contour apparent offert aux traversées de longueur inférieure à l est nulle : la fonction $F(l)$ reste identiquement nulle pour $l < e$. Cette circonstance se rencontre en métallurgie avec par exemple la structure en lamelles de l'eutectique cadmium-étain.

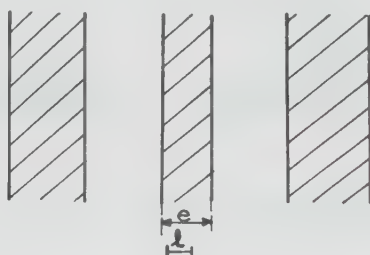


Fig. 11

Hors de ce cas on ne peut rien affirmer de général. Si la loi des épaisseurs est $\phi(e)$ la fonction $F(l)$ est proportionnelle à $\phi(l)$ et a donc même comportement à l'origine.

3 - Petits grains

Dans la pratique de l'analyse de texture on rencontre très souvent des petits grains, soit réels, soit artificiel, produits par le bruit de fond de la caméra de télévision. Ces grains parasites sont des taches ponctuelles de largeur constante égale au pas d'analyse. La fonction de répartition des traversées est en toute rigueur un échelon unité



Mais le caractère discret des mesures et la méthode d'estimation des dérivées est telle qu'on calcule néanmoins par points une fonction $f(l)$ de valeur finie à l'origine et nulle ailleurs.

Les petits grains et le bruit de fond ajoutent une constante à la valeur de $f(o)$.

Dans une population chaque type de terminaisons contribue au contour apparent utile aux traversées de longueur inférieure à 1 par un terme l^α de degré α correspondant. Pour la valeur à l'origine $f(o)$ ce sont les termes de plus bas degré c'est-à-dire les contours les plus anguleux qui l'emportent. Ainsi des pores à la fois anguleux et arrondis doivent donner $f(o)$ non nul. Les termes de degrés α supérieurs contribuent à la dérivée $f'(o)$. Par exemple un schéma booléen constitué de grains primaires polygonaux conduirait à une granulométrie des pores telle que $f'(o) = 0$, s'il n'y avait de petits pores contribuant au contenu apparent par des termes de degré inférieur à 1, ce qui permet à la densité d'avoir à l'origine un comportement exponentiel.

Expérimentalement on n'obtient jamais de valeur infinie : des contacts tangentiels se confondent avec des angles curvilignes. On ne distingue pas un pic intergranulaire d'un angle de polygone. C'est pourquoi, vu la finesse de notre analyse, il est plus réaliste de distinguer seulement deux types : les lois à valeur $f(o)$ nulle indiquant un haut degré de régularité du contour et les lois dont la valeur $f(o)$ non nulle, finie ou non indique la présence de petits grains ou d'extrémités anguleuses.

Le tableau ci-dessous synthétise les résultats.

Courbures finies ou nulles	$f(o) = 0$ $f'(o) = 0$ isthmes, canaux, lamelles $f'(o) \neq 0$ terminaisons arrondies
Angulosités petits grains	$f(o) \neq 0$ $f'(o) = 0$ Angles à bords rectilignes $f'(o) \neq 0$ Angles curvilignes $f(o) = + \infty$ Petits grains - Bruit de fond Contacts tangentiels

CHAPITRE X

SPHERICITE, RONDEUR ET INDICES DE FORME EN GENERAL

I - INTRODUCTION

Les concepts de rondeur et de sphéricité ont pour but de caractériser la ressemblance d'un grain avec une sphère, tant par son allure globale que par le poli de sa surface. Ces notions relèvent d'une préoccupation plus générale qui est de représenter une forme au moyen de quelques paramètres quantitatifs. Et cela pose de difficiles problèmes.

1 - Concept de forme :

Il faudrait d'abord réfléchir sur le concept de forme. De nombreux travaux abordent ce sujet mais il n'a pas été possible d'en tirer une définition précise et opératoire de la forme. Tout objet a-t-il une forme ? Peut-on parler de la forme d'un réseau de pore par exemple ? Citons cependant M. BENZECRI [6] : "une forme est donnée comme un ensemble de propriétés (compréhension) ; et en particulier, au niveau des objets géométriques ces propriétés sont des rapports entre parties d'un tout organisé". Cette affirmation dégage une remarque : en tant que structure, organisation des divers éléments d'un ensemble, la forme doit être distinguée de la taille. Grand ou petit un disque reste un disque parce qu'il est défini par une relation "distance à un point fixe inférieure à ...", peu importe la grandeur de cette distance. En ce sens une homothétie ne change pas la forme. De manière intuitive d'ailleurs l'on peut dire que dans l'espace euclidien usuel toute similitude (combinaison d'une homothétie translation et rotation) ne change pas la forme.

Ainsi la forme apparaît comme :

un ensemble de propriétés définissant une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties de l'espace euclidien R^3 (ou R^N en général) et possédant la propriété d'être stable pour le groupe des similitudes.

Cette relation définit des classes d'équivalence dont les représentants peuvent se matérialiser par des sous-ensembles de R^N .

Malheureusement une telle définition n'est pas opératoire (voir néanmoins l'Annexe VIII). Pour quelle le soit il faudrait une relation suffisamment simple. Les mathématiques, construction de l'esprit, connaissent de telles relations : le triangle, le cube, le cylindre. En réalité ces formes n'existent pas. Il n'y a que des objets triangulaire cubiques ou cylindriques. Entre la sphère et l'objet sphérique (ellipsoïde ou "patatoïde") il y a une foule de gradations, de déformations insensibles. Dire d'une bille d'acier que c'est une sphère est introduire un modèle mathématique. Dans quelle mesure ce modèle est-il adéquat ? C'est ce que cherchent précisément à exprimer les indices de sphéricité.

2 - Indices de forme : problèmes généraux

Il n'est qu'à parcourir la littérature qui traite ce sujet pour s'apercevoir que la définition d'un critère de sphéricité comporte une grande part d'arbitraire. L'idée commune est de comparer des caractéristiques de l'objet à celles d'une certaine sphère définie pour les besoins de la cause, et ce à l'aide d'un indice variant entre les valeurs extrêmes 0 (pour un segment ou un plan) et 1 (pour une sphère). Bien sûr les valeurs prises par l'indice dépendent de sa définition mais on pourrait espérer que les divers classements qu'ils déterminent entre objets plus ou moins sphériques soient les mêmes. Il n'en est rien. C'est que chaque définition privilégie un aspect particulier de la "sphéricité" : écart à la sphère circonscrite, rapport des diamètres, propriétés isopérimétrique. Et plus fondamentalement cette absence de cohérence trahit le caractère artificiel que revêt l'assimilation d'une forme quelconque à une sphère. Quel sens concret donner à la "sphéricité" d'un triangle ?

D'où le besoin d'adapter la forme de référence à celle de l'objet étudié et à cet effet de forger un critère d'écart assez souple pour agir non plus seulement sur une sphère mais sur un ensemble quelconque.

Un autre problème est celui du passage de l'individu à la population. Même si l'indice de forme était parfait il ne saurait caractériser qu'un individu. Or c'est la population qui présente de l'intérêt. Soient par exemple N grains de sphéricité Ψ_i (définie de manière quelconque). Peut-on définir la sphéricité moyenne de ces N grains ? Certes il est toujours possible de calculer des expressions du type :

$$\bar{\Psi} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Psi_i$$

$$\text{avec } \sum_i \alpha_i = 1$$

mais le choix des Ψ_i reste arbitraire tant qu'on ne donne pas à $\bar{\Psi}$ un sens précis. Et le fait est qu'a priori aucune conception de la "sphéricité moyenne" ne s'impose à l'évidence. Ainsi apparaît une seconde exigence : un indice de forme doit permettre sans ambiguïté le calcul d'une moyenne.

II - LA SPHERICITE - ETUDE CRITIQUE

1 - Etude critique des indices usuels

Toute fonctionnelle prenant la valeur 1 pour la sphère et des valeurs inférieures pour les autres formes peut constituer un indice de sphéricité. En pratique il existe 3 définitions principales :

a - Définition isopérimétrique :

WADELL (1932) a proposé le critère suivant :

(X,1)

$$T_1 = \frac{S}{S_0} = \frac{\text{surface d'une sphère de même volume que le grain}}{\text{surface du grain}}$$

Cette formulation utilise une propriété caractéristique bien connue de la sphère, à volume donné c'est le corps de surface minimale. (cercle : à surface donnée, périmètre minimal). Plus précisément :

$$\begin{aligned} \text{Dans l'espace } (R^3) : \Psi_1 &= \frac{(36 \pi)^{1/3} V^{2/3}}{S} \leq 1 & \begin{bmatrix} V : \text{Volume} \\ S : \text{Surface} \end{bmatrix} \\ \text{Dans le plan } (R^2) : \Psi_1 &= \frac{\sqrt{\pi S}}{\mathcal{L}} \leq 1 & \begin{bmatrix} S : \text{Surface} \\ \mathcal{L} : \text{Demi-périmètre} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'égalité n'est possible que dans le cas de la sphère (R^3) ou du cercle (R^2).

- Ainsi définie, la sphéricité semble utiliser des propriétés très profondes de la forme. Elle permet aussi une interprétation globale puisque volumes, surfaces et périmètres sont des grandeurs additives. L'intérêt du rapport surface/périmètre est qu'il s'applique de manière générale sans qu'il y ait nécessairement individualisation géométrique des constituants. Par exemple il est possible de former une expression

tation est cependant plus délicate.

- Le critère Ψ_1 est extrêmement sensible à la régularité du contour. Théoriquement, une sphère dont la surface présenterait un aspect rugueux, des irrégularités nombreuses mais à très petite échelle, aurait une faible sphéricité. Considérons par exemple un cercle de rayon R auquel nous superposons de petites fluctuations sinusoïdales. En équation polaire :

$$r(\theta) = R + \sin k \theta \quad \frac{a}{R} \ll 1 \quad k \text{ entier}$$

$$\text{sa surface est } S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta = \pi R^2 + \pi \frac{a^2}{2}$$

son périmètre pour k grand est de l'ordre de $4 k a$ et devient donc infini avec k : la sphéricité Ψ_1 d'un tel corps est donc très faible.

- L'isopérimétrie ne permet pas de comparaison à une autre forme que la forme sphérique.

- Enfin la surface d'un grain de R^3 ou le périmètre dans R^2 sont difficiles à atteindre expérimentalement.

b - Définition par écart volumique

KRUMBEIN (1941) a proposé l'expression :

$$(X,2) \quad \Psi_2 = \sqrt[3]{\frac{V}{V}} = \sqrt[3]{\frac{\text{volume du grain}}{\text{Vol. de la sphère circonscrite}}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi a^3}} = \frac{r}{a} = \frac{\text{rayon nominal}}{\text{rayon de la sphère circonscrite}}$$

Ce critère considère qu'un grain est d'autant plus sphérique que son volume s'écarte moins de celui de la sphère circonscrite.

Il en existe des variantes :

- approximation du volume du grain par celui d'un ellipsoïde a, b, c, :

$$a \geq b \geq c \quad \Psi = \frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3} \pi abc}}{\sqrt[3]{\frac{4}{3} \pi a^3}} = \sqrt[3]{\frac{bc}{a^2}}$$

- écart à la sphère inscrite :

$$\Psi = \frac{\sqrt[3]{\frac{4}{3} \pi c^3}}{\sqrt[3]{\frac{4}{3} \pi abc}} = \sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} \quad \text{SNEED and FOLK (1958)}$$

- Tels quels ces critères ne sont pas généralisables à une autre forme que la sphère et ne peuvent non plus se prêter à des moyennes. Cependant le principe des écarts volumiques est intéressant car les volumes sont des grandeurs additives et mesurables expérimentalement. C'est lui que nous retiendrons en le généralisant.

c - Définition par la distance de HAUSDORFF

RILEY (1941) a proposé l'indice :

$$(X, 3) \quad \Psi_3 = \sqrt[2]{\frac{r_i}{r_c}} \quad \left[\begin{array}{l} r_i : \text{rayon du cercle inscrit} \\ r_c : \text{rayon du cercle circonscrit} \end{array} \right]$$

Ce critère utilise implicitement une certaine "distance" (au sens mathématique du terme) définie sur des sous-ensembles de l'espace R^n : la distance de HAUSDORFF. Cette distance est très générale puisqu'elle agit sur tous les compacts de R^n mais elle n'est pas additive et peu accessible à l'expérience. (cf. Annexe VII).

2 - Le classement des formes : exemples

D'après les définitions on peut prévoir que :

- Ψ_1 est sensible à la fois à l'allongement et à la régularité du contour.
- Ψ_2 et Ψ_3 rendent compte de l'aspect sphérique global.

Les indices diffèrent non seulement par les valeurs numériques qu'ils prennent mais aussi par la façon dont ils classent les formes relativement à leur sphéricité. La figure 1 représente les diverses sphéricités d'une ellipse d'axes a et b et d'un rectangle de côtés a et b en fonction du rapport $\lambda = b/a$. ($b \leq a$).

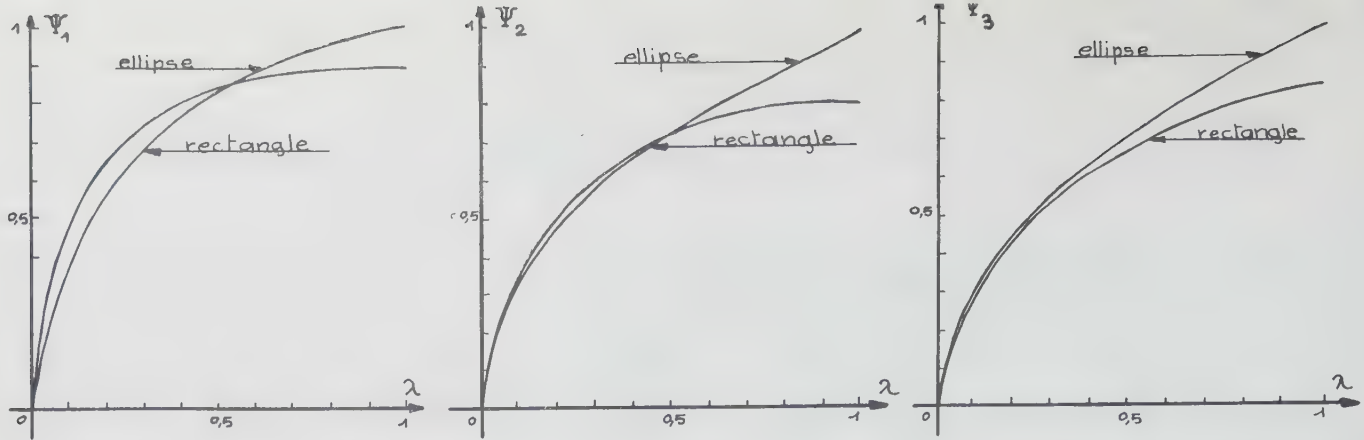
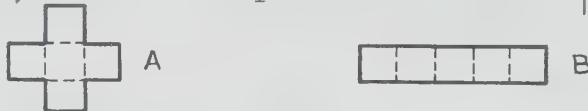


Fig. 1

Selon Ψ_1 l'ellipse est plus sphérique que le rectangle pour $\lambda \geq 0,49$, selon Ψ_2 pour $\lambda \geq 0,51$ et selon Ψ_3 quel que soit λ . Les conclusions qu'on tirerait de Ψ_3 sont très différentes de celles que suggèreraient Ψ_1 et Ψ_2 puisque d'après Ψ_3 le rectangle n'est jamais plus sphérique que l'ellipse alors que selon Ψ_1 ou Ψ_2 il l'est sur 50 % environ de l'intervalle de variation de λ .

Toutes sortes d'exemples sont possibles. WADELL lui même a fait remarquer que les ensembles A et B de la figure 2 ont même surface et même périmètre, donc même sphéricité selon Ψ_1 .



I - DEFINITION D'UN NOUVEL INDICE APPLICABLE A UNE FORME QUELCONQUE

1 - Exigences imposées à l'indice

Un indice de sphéricité et plus généralement de forme devra satisfaire les exigences suivantes :

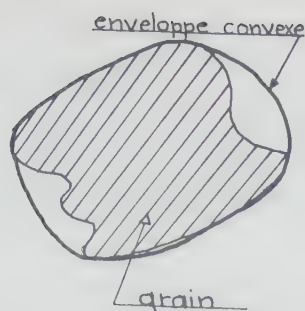
- présenter un sens physique concret
- permettre sans ambiguïté l'addition et le passage en moyenne
- être accessible à l'expérience.

Sens physique ;

La forme des grains est réputée influencer sur leur transport et leur dépôt.

De quelle manière exactement ? La question n'est pas simple et il doit falloir distinguer suivant les écoulements. En première approximation les forces mises en jeu sont :

- la force de pesanteur et la force d'Archimède qui dépendent du volume du grain



des contours apparents (maître-couples) donc de la surface de l'enveloppe convexe du grain (plus petit convexe contenant le grain).

On sait que la surface de l'enveloppe convexe = $4 \times$ contour apparent moyen.

Ces forces dépendent aussi d'ailleurs d'un facteur de forme lié aux questions de viscosité.

- Les forces de forttement au fond pour les grains roulés. Elles dépendent (par les coefficients de frottement) de la nature relative du grain et du fond et de la géométrie du grain. On conçoit par exemple qu'un grain possédant une symétrie de révolution roulera mieux qu'un autre puisqu'il n'existe pas de position plus stable que les autres (centre de gravité toujours à la même hauteur).

On ne saurait conclure que toutes ces considérations imposent un indice de sphéricité bien particulier. L'indice Ψ_1 à la rigueur conviendrait mieux, mais uniquement dans le cas de grains convexes. Le seul facteur indiscutable est le volume du grain.

La forme du grain peut aussi s'interpréter d'une autre manière : en termes d'énergie d'abrasion. Un grain sphérique et lisse indiquera une érosion et un polissage importants et aidera donc à reconstituer l'"histoire" du grain. Mais il n'est qu'à observer des galets pour constater que bien peu sont sphériques : ils présentent plutôt une forme d'ellipsoïde, de "patatoïde". Pourquoi donc s'obstiner à les comparer à des sphères ? Ce qui importe dans l'optique présente est que la forme de référence puisse apparaître comme le stade final d'un processus d'usure. Si pour des raisons spécifiques le naturaliste a lieu de penser que le stade final sera un ellipsoïde, c'est l'"ellipsoïdité" qu'il devra étudier.

En tout cas, au niveau d'une définition générale on peut s'imposer la condition suivante : l'ensemble B auquel on compare le grain A doit être inclus dans A. ($B \subset A$). Si l'on prend la sphère c'est donc à la sphère inscrite qu'il convient de se référer, non à la sphère circonscrite.

Additivité :

Les grandeurs en présence doivent être additives. Le volume, la surface, le périmètre le sont. Les rayons des cercles inscrits ou circonscrits ne le sont pas.

Commodité expérimentale :

Un critère très satisfaisant sur le plan théorique n'offre que peu d'intérêt s'il ne peut donner lieu à des mesures effectives. Bien souvent l'expression théorique doit être réduite à une expression approchée et perd ainsi beaucoup de sa rigueur. C'est le cas de l'indice Ψ_1 de WADELL, par exemple. Ne pouvant faire ses mesures dans l'espace il adopte une approximation qui utilise la projection du grain sur un plan. L'ennui est que les grains plats peuvent conduire au même résultat que les grains épais de même contour apparent.

Pour éviter cet écueil nous ne tenterons pas ici de passer du plan à l'espace. Les mesures sont effectuées en section et nous ne prétendons pas leur donner un sens spatial. Quand il s'agit de comparer des sections entre elles cette démarche se justifie.

Néanmoins cela n'empêche pas de devancer la technique expérimentale et de donner des définitions dans R^n . Il faudra simplement avoir à l'esprit que la "mesure" du grain (notée V) signifie son volume dans l'espace (R^3) et sa surface en section (R^2) ; de même à la surface du grain dans l'espace correspond le périmètre du grain en section.

2 - Définition

Soit A le grain, B l'ensemble de référence. A et B sont de mesure non nulle. Par hypothèse $B \subset A$.

On note $V(A)$ la mesure de A .

Par définition l'indice de forme est :

$$(X,4) \quad \Psi = \frac{V(B)}{V(A)} = \frac{\text{mesure de l'ensemble de référence}}{\text{mesure du grain}}$$

Comme $B \subset A$, $V(B) \leq V(A)$ et $\Psi \leq 1$ l'égalité n'étant possible que si $A = B$. (Pour plus de rigueur mathématique voir Annexe VII).

Population

Soit une population de grains A_i , et une famille d'ensembles B_i tels que $\bigcup_i B_i \subset A_i$. L'indice de forme moyen de la population est alors :

$$(X,5) \quad \bar{\Psi} = \frac{\sum_i V(B_i)}{\sum_i V(A_i)} = \sum_i \frac{V(A_i)}{[\sum_i V(A_i)]} \Psi_i$$

L'indice de forme de chaque grain est pondéré par le rapport de son volume total des grains.

Interprétation

$V(A) - V(B) = V(A) (1 - \Psi)$ est le volume du grain non occupé par B. C'est un résidu. Il est proportionnel au poids de déchet qu'on obtiendrait si l'on usait le grain A jusqu'à lui donner la forme et la taille de B (Inutile d'ailleurs de préciser la position de B dans A).

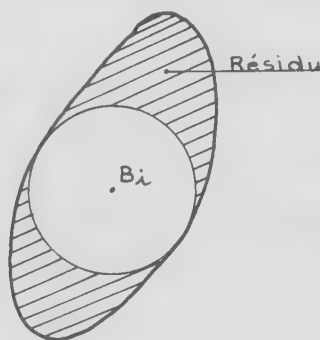


Fig. 4

Dans le cas particulier où B est le plus grand ensemble de cette forme inclus dans A, autrement dit s'il n'existe pas d'homothétique de B également inclus dans A, on dira que $V(A) - V(B)$ est le résidu granulométrique (de A selon B).

De manière globale, si l'on se place du point de vue de la granulométrie (plus grand B inscrit dans chaque A_i), $1 - \bar{\Psi}$ représente le rapport du résidu granulométrique total au volume total des grains. Ou si l'on veut :

$\bar{\Psi}$ = volume total occupé par les B inscrits/volume total des grains.

V - INDICE DE FORME ET GRANULOMETRIE

1 - Relation théorique

Remarque préliminaire

Notre définition de l'indice de forme et le sens de la granulométrie laissent prévoir une relation étroite entre les deux notions. Mais si l'on fait une mesure automatique certaines précautions sont nécessaires.

Prenons en effet le cas d'un grain unique, concave, présentant un isthme par exemple et soit B_λ une famille de cercles.

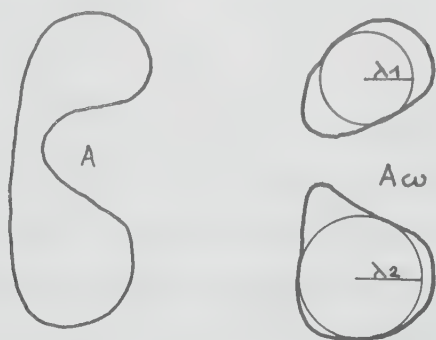


Fig. 5

Il y a dans le grain deux parties où l'on peut inscrire indépendamment B_{λ_1} et B_{λ_2} . La sphéricité théorique s'exprime sans difficulté par :

$$\Psi = \frac{\pi \lambda_2^2}{V(A)}$$

Mais les mesures automatiques auront tôt fait de séparer le grain A en deux (cf. figure) sans qu'il soit possible de reconnaître que ces deux grains proviennent d'un seul. La sphéricité mesurée sera donc :

$$\frac{\pi (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{V(A)}$$

Cette difficulté est d'ailleurs opportune sur le plan de l'interprétation physique : si l'on usait le grain A on n'obtiendrait non pas une mais bien deux sphères. De manière plus profonde peut-être on constate que les problèmes apparaissent dès que le grain n'est plus suffisamment individualisé, autrement dit dès qu'il peut se scinder par ouverture. Nous ne considérerons ici que les familles de grains pour lesquelles un tel phénomène est impossible. (cf. formulation mathématique en Annexe IX)

Plaçons-nous donc dans l'espace R^k et envisageons la granulométrie d'une famille de grains A (vérifiant la propriété précédente) selon l'ensemble B de mesure non nulle (ce qui exclut le segment). Posons pour la comodité $V(B) = v$.

Lorsque λ varie de $d\lambda$ l'ensemble A_{ω_λ} est amputé :

- des grains pour lesquels B_λ était le plus grand B inscriptible (il n'est donc pas possible d'y inscrire $B_{\lambda+d\lambda}$ et le volume balayé par les $B_{\lambda+d\lambda}$ qu'il est possible d'y inscrire est nul)
- d'une partie des grains plus gros dans $B_{\lambda+d\lambda}$.

On peut écrire ceci en posant :

n : nombre de grains pour lesquels B_λ est le plus grand B inscriptible.

$$G(d\lambda) = \frac{n\lambda^k v}{V(A)} + H(d\lambda)$$

$H(d\lambda)$: mesure positive définie précisément par la relation ci-contre

Convenons de dire que B_λ est "inscrit" s'il est le plus grand B inscriptible dans un grain donné.

Soient : $\phi(d\lambda)$: la fonction de répartition des λ pour lesquels B_λ est inscrit (par exemple fonction de répartition des rayons des cercles inscrits)

N : le nombre total des grains.

Alors $n = N \phi(d\lambda)$ et si $E(\lambda^k)$ représente le moment d'ordre k de ϕ on a :

$$G(d\lambda) = \underbrace{\frac{\lambda^k \phi(d\lambda)}{E(\lambda^k)}}_{\substack{\text{distribution} \\ \text{des mesures} \\ \text{des } B_\lambda \text{ inscrits}}} \cdot \underbrace{\frac{N v E(\lambda^k)}{V(A)}}_{\Psi} + H(d\lambda)$$

$\frac{\lambda^k \phi(d\lambda)}{E(\lambda^k)} = \phi_k(d\lambda)$ est une distribution de probabilité. Elle représente la loi des mesures des B_λ inscrits. En effet :

$$\frac{\lambda^k \phi(d\lambda)}{E(\lambda^k)} = \frac{Nv}{Nv} \frac{\lambda^k \phi(d\lambda)}{E(\lambda^k)} = \frac{\text{volume occupé par les } B_\lambda \text{ inscrits de taille } \lambda}{\text{volume total occupé par les } B \text{ inscrits}}$$

En d'autres termes $\phi_k(d\lambda)$ représente la distribution en mesure des λ .

$$\frac{N v E(\lambda^k)}{V(A)} = \frac{\text{volume total occupé par les B inscrits}}{\text{volume total des grains}}$$

Ce terme est exactement l'indice de forme moyen de la population A. D'où sous forme synthétique l'équation :

(X,6)	$G(d\lambda) = \Psi \cdot \phi_k(d\lambda) + H(d\lambda)$	G : granulométrie selon B ϕ_k : loi des mesures des B inscrits Ψ : sphéricité
-------	---	---

Le facteur Ψ apparaît comme pondérant l'importance du volume occupé par les B_λ inscrits. Si tous les grains de A ont la forme de B (grains homothétiques) Ψ bien entendu prend la valeur 1. Le terme $1 - \Psi$ a le sens d'un résidu granulométrique global : proportion du volume des grains non occupés par les B_λ inscrits ou si l'on veut proportion du poids total des déchets qui résulteraient d'une érosion amenant la population actuelle de grains à une population de grains ayant tous la forme B choisie. Ce résidu global s'obtient par simple addition des contributions de chaque grain.

On montre aussi (cf. Annexe VIII) que Ψ représente l'influence de la forme et de l'orientation sur une granulométrie qui prétend étudier le seul facteur "taille des grains".

2 - Calcul effectif à l'aide de l'analyseur de textures

Ψ est défini par $\frac{N v E(\lambda^k)}{V(A)}$ qui nécessite de connaître :

{	N : nb total des grains $V(A)$: volume total des grains $E(\lambda^k)$ donc $\phi_k(\lambda)$	(v : volume de la figure unitaire B est connu)
---	--	--

N et V(A) s'obtiennent par les méthodes classiques de la morphologie mathématique. Quand à ϕ_k il se calcule à partir de ϕ qu'on détermine par la relation :

(X,7)

$$\phi(d_\lambda) = \frac{N[A \ominus \check{B}_\lambda] - N[A \ominus \check{B}_{\lambda+d\lambda}]}{N}$$

$N[A \ominus \check{B}_\lambda]$: nombre de grains de l'érodé de A par B_λ .

(Pour plus de détails se reporter à l'Annexe IX).

Comme on calcule ϕ indépendamment de G, on peut atteindre cette mesure $H(d\lambda)$, introduite pour les besoins de l'équation (X,6) mais qui se révélera significative d'un élément de la forme à plus petite échelle : la rondeur.

V - LA RONDEUR

1 - Définition critique

La rondeur, ou l'"arrondi", ou l'angulosité (qui ressort de la même préoccupation) sont des notions très expérimentales mais cependant assez délicates à définir précisément. L'aspect lisse ou rugueux est un concept de la perception humaine et comme tel dépend de l'échelle d'observation des objets. Ainsi un grain de quartz vu au microscope peut sembler parfaitement lisse ; à un grossissement supérieur apparaissent toutes les irrégularités de l'état de surface et l'aspect peut devenir rugueux ; à l'échelle macroscopique d'un autre côté un assemblage de grains sur une toile émeri sera également rugueux. Apparaissent comme rugueux des solides présentant des protubérances, des parties saillantes, soit en termes plus mathématiques, des petits rayons de courbure positifs.

WADELL, repris par KRUMBEIN a proposé un indice de "rondeur" mettant en jeu les rayons de courbure des parties saillantes (corners) :

$$P = \frac{\sum r_i}{R N} \quad \left\{ \begin{array}{l} N : \text{nombre de rayons mesurés} \\ r_i : \text{rayon de courbure des bosses} \\ R : \text{rayon du cercle inscrit} \end{array} \right.$$

Ces mesures se font en principe dans 3 plans orthogonaux.

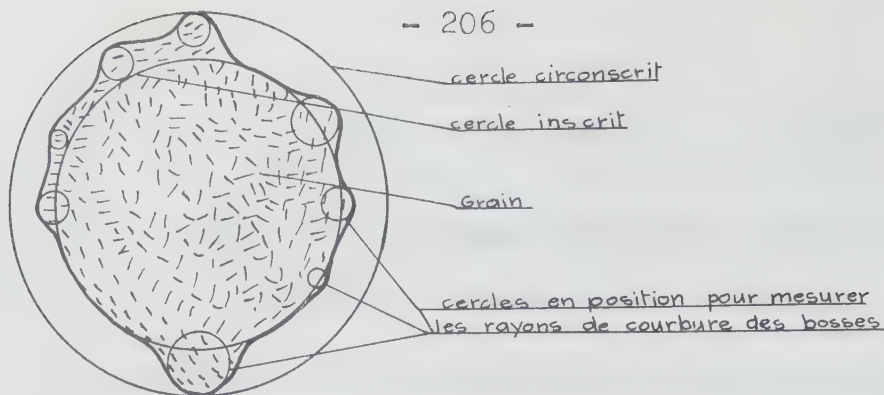


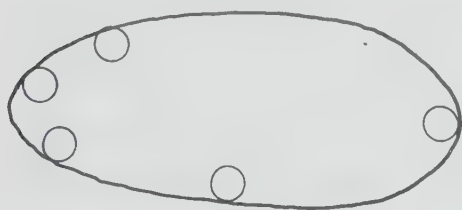
Fig. 6

On a vu au chapitre I les objections que soulève un tel indice.

2 - Nouvelle définition

Nous proposons d'introduire la dépendance du concept vis-à-vis de l'échelle d'observation dans la définition même du concept.

Un grain arrondi à l'échelle λ si l'ouverture de A selon la sphère B_λ est identique au grain A lui-même.



- Grain lisse -



- Grain anguleux -

Fig. 7

Comme on ne considère que des grains sans trous et sans isthmes, la définition peut s'exprimer de manière équivalente :

Ce grain est arrondi s'il coïncide avec l'enveloppe des sphères (de taille donnée) qu'on peut y inclure, c'est-à-dire tel qu'en tout point de la surface du grain il existe une sphère tangente et inscriptible dans le grains.

Ceci rejoint tout-à-fait les considérations relatives aux rayons de courbure, du moins en ce qui concerne les populations auxquelles nous nous limitons (grains sans trous ni isthmes). En effet, une condition nécessaire et suffisante pour que $Aw_\lambda = A$ est que tout rayon de courbure positif soit supérieur à λ .

Dans le cas contraire on peut caractériser l'angulosité par :

$$\text{(pour 1 grain)} \quad \frac{V(A) - V(A\omega_\lambda)}{V(A)} = \frac{\text{volume des "parties anguleuses"}}{\text{volume du grain}}$$

Bien entendu si la sphère B_λ est trop grande l'ouverture atteint non plus seulement les irrégularités du contour mais le grain lui-même. C'est le problème d'échelle déjà mentionné.

3 - Interprétation de la mesure $H(d\lambda)$

Cette interprétation peut se faire quel que soit l'ensemble B de référence mais en pratique c'est ici le cas d'une sphère qui est intéressant. Nous le traiterons donc directement.

D'après l'équation (X,6) $H(d\lambda) = G(d\lambda) - \Psi \phi_k(d\lambda)$

- Supposons que $\forall \lambda < \lambda_0 \quad \phi_k(\lambda) = 0$ c'est-à-dire que la taille de la plus petite sphère inscrite soit non nulle.

$$\text{Alors } \lambda < \lambda_0 \quad H(\lambda) = G(\lambda) = \frac{V(A) - V(A\omega_\lambda)}{V(A)}$$

- Soit maintenant au contraire $\lambda > \lambda_0$.

C'est le cas général : il peut exister des grains petits devant la taille de la sphère B_λ utilisée pour mesurer l'angulosité.

Rangeons alors la population A en deux familles :

$$\left[\begin{array}{l} A_1 : \text{grains pour lesquels la sphère inscrite a un rayon} \\ \quad \text{inférieur à } \lambda. \\ A_2 : \text{grains pour lesquels la sphère inscrite a un rayon} \\ \quad \text{supérieur à } \lambda. \end{array} \right.$$

Ψ_1 : sphéricité moyenne de A_1

$V(A_1)$: volume total des grains de A_1

On montre que :

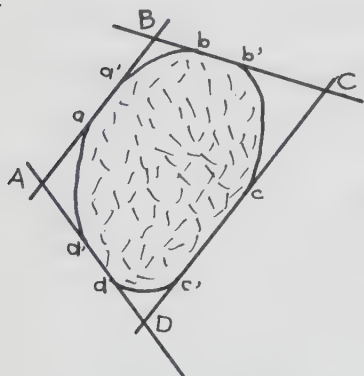
$$V(A) H(\lambda) = (1 - \Psi_1)V(A) + \text{volume des parties anguleuses des grains de } A_2$$

Or $(1 - \Psi_1) V(A_1)$ est le résidu granulométrique total de A_1 , et prend une valeur d'autant plus faible que les petits grains sont sphériques et qu'ils représentent une fraction moins importante du total. On pourra négliger ce terme devant l'autre si λ est convenablement choisi.

Alors, comme précédemment :

$$H(\lambda) = \frac{\text{volume des parties anguleuses}}{\text{volume total}}$$

Ainsi c'est le comportement de $H(\lambda)$ qui caractérise l'angulosité. Notons que l'interprétation physique sous-jacente n'est pas entièrement nouvelle. TESTER* en 1931 a exposé une méthode de calcul de rondeur, qu'il définissait comme le pourcentage des arêtes érodées du contour initial. (longueur érodée/périmètre initial).



$$\text{rondeur} = \frac{(AB-aa') + (BC-bb') + (CD-cc') + (DA-dd')}{AB + BC + CD + DA}$$

Son raisonnement portait sur les périmètres alors que le nôtre porte sur les surfaces (ou les volumes). L'idée est au fond la même. Mais l'interprétation par $H(\lambda)$ est objective alors que la méthode de TESTER oblige à se donner une forme initiale qu'en vérité on ne connaît pas.

* KRUMBEIN et PETTICORN [21 p. 282 et 283]

CONCLUSIONS :

PERSPECTIVES D'AVENIR

Les photos de réseaux poreux présentées ici montrent bien la diversité étonnante des morphologies. Or ce sont elles qui régissent les propriétés-réservoir des roches et il faut y chercher l'explication de leurs capacités variables de stockage et d'écoulement des fluides. Certes on dispose déjà d'un arsenal de mesures pétrophysiques suffisantes pour l'usage qu'on en fait. Mais ces mesures sont globales, indifférenciées, aveugles : elles ne permettent pas de voir les phénomènes ; elles ne tiennent pas compte, ou indirectement seulement, de la morphologie du réseau poreux.

A-t-on besoin d'une analyse plus fine ? Sans aucun doute. Prenons pour exemple le comportement de la kaolinite dans le gisement saharien : l'injection de résine prouve que l'argile contribue de façon notable aux réserves d'huile. On pourrait objecter que la résine, injectée sous pression, a quelque peu forcé son chemin ; mais précisément l'huile ne force-t-elle pas le sien au cours de la récupérations secondaire ? N'y a-t-il pas là des réserves récupérables ? Quoi qu'il en soit les mesures à l'Analyseur de Textures laissent la faculté d'englober ou d'exclure cette porosité de l'argile. D'ailleurs, et c'est un point important, l'espace poreux tel qu'on le voit en plaques minces conduit à des porosités et des surfaces spécifiques bien moindres parfois et certainement plus réalistes que leurs mesures physiques.

Un premier pas vient d'être franchi : on peut désormais voir et caractériser mathématiquement la morphologie des pores. Un grand pas reste à faire : relier les grandeurs ainsi obtenus aux propriétés-réservoir diverses. On peut envisager trois démarches complémentaires :

- la voie de la recherche fondamentale comme celle de G. MATHERON sur les perméabilités.
- une démarche de type statistique cherchant des corrélations entre paramètres morphologiques et caractéristiques de production des puits dans le but d'établir des relations expérimentales et éventuellement de construire des modèles descriptifs voire génétiques.

- une démarche empirique consistant à grouper les morphologies en familles-types et à raisonner par analogie avec les gisements déjà connus. C'est le principe d'un "atlas" des réservoirs mais avec un souci de structuration qui le rendrait opérationnel. Intelligemment constitué un tel atlas formaliserait en quelque sorte l'intuition du géologue qui n'est jamais que de l'expérience bien assimilée.



REMARQUES

coloration proportionnelle à l'épaisseur de la lame - une partie de celle-ci (sur les bords) étant moins épaisse apparaît peu colorée. Certains pores pourraient correspondre à des arrachements de grains. Un peu d'argile fortement teintée.

coloration faible sur les bords. Quelques grains silico-argileux légèrement imprégnés. Rares grains argileux très fortement imprégnés.

coloration faible sur les bords. "Argile" du type chamosite, le plus souvent colorée en violet rougeâtre (composition de la teinte naturelle bistre verdâtre et du violet rhodamine B)

imprégnation très faible malgré une porosité assez importante (quasiment nulle sur les bords). Quelques grains argileux très imprégnés.

imprégnation faible dans l'ensemble, kaolinite presque aussi colorée que les pores vides. Quelques grains d'argile très fortement imprégnés.

lame écaillée. Rares pores, normalement colorés. Argile cryptocristalline assez fortement imprégnée mais d'une façon irrégulière en lumière réfléchie, débordement de résine colorée, brique très pâle sous les quartz.

coloration faible sur les bords. Argile chloriteuse (chamosite) ou phosphate teinté en rouge brique à violet.

Chamosite imprégnée, en rouge brique violet. Lame non recouverte.

rares pores normalement imprégnés. Très abondant. nodules ou aggrégats d'argile chloriteuse (chamosite) imprégnés en violet intense, rougeâtre à verdâtre.

lamelle ondulée. Très rares pores. L'espace intergranulaire est occupé par de l'anhydrite et du carbonate.

don 1

kaolinite imprégnée indiquant une certaine porosité intervermiculaire.

pas de porosité authentique. L'espace intergranulaire est occupé par de l'anhydrite.

lame assez épaisse permettant une belle coloration, bien représentative.

lame écaillée sur les bords. Imprégnation de plages carbonatées, argileuses (violet foncé). Fréquents espaces vides, non teintés (arrachement probable). Coloration peu représentative.

lame arrachée, un peu épaisse sur les bords. Quelques pores authentiques et bien colorés, d'autres très peu colorés, d'autres enfin incolores (arrachement probable). Beaucoup de kaolinite plus ou moins colorée.

coloration faible, mais régulière et représentative, sauf sur les bords un peu plus minces.

bonne imprégnation de pores authentiques, sauf sur les bords. Parfois légère diffusion du colorant dans le carbonate avoisinant les pores.

bonne imprégnation. Pas de pore oublié, mais légère coloration violette (en lumière réfléchie) du pourtour des oolites.

coloration plutôt faible. Légère coloration violette (en lumière réfléchie) des oolites.

apparaissent en bistre (orange foncé à brique clair), l'argile ou le carbonate imprégné est violacé-rose.

considérer que la kaolinite est poreuse à 90% environ ; ce pourcentage doit être ajouté à la porosité.

DELFINER	examen en lumière réfléchie			Quartz + frag. roches + silice	examen en lumière transmise (détail des constituants)					
	Constituants incolores	Constituants colorés	Porosité		Feldspaths	Carbonate	Argile			Sulfate
							Kaolini- te	Chamosi- te	Autres	
1	80	7,5	12,5	77,5		8	2			
2	77,5	2	19,5	66,5	8				6	
3	88,5	4,5	7	80		2,5		10,5		
4	87	3,5	9,5	84,5					6	
5	95	3,5	1,5	87		3	6,5		2	
6	88	10	2	81,5		8	5		2,5	
7	88,5	7	4,5	86				9,5		
8	82,5	2,5	15	75		7,5		2,5		
9	88	11,5	0,5	67		21,5		11		
10	97,5	1,5	1,5	75		7			1,5	15
11	84	3,5	12,5	84,5		1,5	3			
12	89	8,5	2,5	89,5			8			
13	98,5	1,5		71		1,5		2,5	1	24
14	96,5		3,5			92,5				4
15	93	4,5	2,5	65	4	20			8,5 ?	
16	83	11	6	72	8	2	3		8	1
17	94		6			84				
18	95,5	0,5	4			96				
19	97,5		2,5			98				
20	99		1			99				

D'une façon générale, l'observation en lumière naturelle réfléchie est très fructueuse. Les pores bien imprégnés de sidérose (non imprégnés) apparaissent en jaune pâle.

TABULATION DE Δ_A AVEC $A_0 = 2 \int_0^{\infty} (C(h) - q^2) dh$ ET $C(h) = q^2 e^{-\lambda h}$

POROSITE	0.0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.0	0.0	0.35055	0.39836	0.43202	0.45898	0.48188	0.50202	0.52011	0.53663	0.55188
0.010	0.56010	0.57943	0.59202	0.60397	0.61534	0.62621	0.63662	0.64664	0.65628	0.66559
0.020	0.67459	0.68331	0.69176	0.69998	0.70797	0.71574	0.72332	0.73072	0.73794	0.74500
0.030	0.75190	0.75855	0.76527	0.77175	0.77811	0.78434	0.79046	0.79647	0.80238	0.80819
0.040	0.81389	0.81951	0.82504	0.83048	0.83584	0.84111	0.84632	0.85144	0.85650	0.86149
0.050	0.86041	0.86512	0.86966	0.87409	0.87849	0.88285	0.88715	0.89144	0.89569	0.90000
0.060	0.91230	0.91655	0.92072	0.92483	0.92890	0.93292	0.93690	0.94085	0.94477	0.94865
0.070	0.95342	0.95730	0.96114	0.96495	0.96873	0.97247	0.97617	0.97985	0.98349	0.98710
0.080	0.99067	0.99422	0.99774	1.00122	1.00468	1.00811	1.01152	1.01489	1.01824	1.02157
0.090	1.02486	1.02814	1.03138	1.03461	1.03781	1.04098	1.04414	1.04727	1.05037	1.05346
0.100	1.05652	1.05956	1.06259	1.06559	1.06857	1.07153	1.07447	1.07739	1.08029	1.08318
0.110	1.08604	1.08889	1.09172	1.09453	1.09733	1.10010	1.10286	1.10561	1.10833	1.11104
0.120	1.11374	1.11641	1.11908	1.12172	1.12436	1.12697	1.12957	1.13216	1.13473	1.13729
0.130	1.13984	1.14237	1.14488	1.14739	1.14988	1.15235	1.15482	1.15727	1.15971	1.16213
0.140	1.16454	1.16694	1.16933	1.17171	1.17407	1.17642	1.17876	1.18109	1.18341	1.18572
0.150	1.18801	1.19030	1.19257	1.19483	1.19708	1.19932	1.20155	1.20377	1.20598	1.20818
0.160	1.21037	1.21255	1.21472	1.21688	1.21903	1.22118	1.22331	1.22543	1.22754	1.22965
0.170	1.23174	1.23383	1.23590	1.23797	1.24003	1.24208	1.24412	1.24616	1.24818	1.25020
0.180	1.25221	1.25421	1.25620	1.25818	1.26016	1.26213	1.26409	1.26604	1.26798	1.26992
0.190	1.27185	1.27377	1.27569	1.27759	1.27949	1.28139	1.28327	1.28515	1.28702	1.28889
0.200	1.29074	1.29259	1.29444	1.29627	1.29810	1.29993	1.30174	1.30355	1.30536	1.30715
0.210	1.30895	1.31073	1.31251	1.31428	1.31604	1.31780	1.31956	1.32130	1.32305	1.32478
0.220	1.32651	1.32823	1.32995	1.33166	1.33337	1.33507	1.33676	1.33845	1.34013	1.34181
0.230	1.34348	1.34515	1.34681	1.34847	1.35012	1.35176	1.35340	1.35504	1.35667	1.35829
0.240	1.35991	1.36152	1.36313	1.36474	1.36633	1.36793	1.36952	1.37110	1.37268	1.37425
0.250	1.37582	1.37739	1.37895	1.38050	1.38205	1.38360	1.38514	1.38668	1.38821	1.38974
0.260	1.39126	1.39278	1.39429	1.39580	1.39731	1.39881	1.40030	1.40180	1.40328	1.40477
0.270	1.40625	1.40772	1.40919	1.41066	1.41212	1.41358	1.41504	1.41649	1.41793	1.41937
0.280	1.42081	1.42225	1.42368	1.42511	1.42653	1.42795	1.42936	1.43077	1.43218	1.43358
0.290	1.43498	1.43633	1.43777	1.43916	1.44055	1.44193	1.44331	1.44468	1.44605	1.44742
0.300	1.44878	1.45014	1.45150	1.45285	1.45420	1.45555	1.45689	1.45823	1.45956	1.46089
0.310	1.46222	1.46355	1.46487	1.46619	1.46751	1.46882	1.47013	1.47144	1.47274	1.47404
0.320	1.47534	1.47663	1.47792	1.47921	1.48049	1.48177	1.48305	1.48432	1.48559	1.48686
0.330	1.48813	1.48939	1.49065	1.49191	1.49316	1.49441	1.49566	1.49690	1.49815	1.49938
0.340	1.50062	1.50185	1.50308	1.50431	1.50554	1.50676	1.50798	1.50919	1.51041	1.51162
0.350	1.51283	1.51403	1.51523	1.51643	1.51763	1.51882	1.52002	1.52121	1.52239	1.52358
0.360	1.52476	1.52594	1.52711	1.52829	1.52946	1.53063	1.53179	1.53296	1.53412	1.53527
0.370	1.53643	1.53758	1.53873	1.53988	1.54103	1.54217	1.54331	1.54445	1.54559	1.54672
0.380	1.54785	1.54888	1.55011	1.55124	1.55236	1.55348	1.55459	1.55571	1.55682	1.55793
0.390	1.55904	1.56015	1.56125	1.56235	1.56345	1.56455	1.56564	1.56674	1.56783	1.56891
0.400	1.57000	1.57108	1.57215	1.57325	1.57432	1.57540	1.57647	1.57754	1.57861	1.57968
0.410	1.58074	1.58180	1.58286	1.58392	1.58498	1.58603	1.58709	1.58814	1.58918	1.59023
0.420	1.59127	1.59233	1.59336	1.59439	1.59543	1.59647	1.59750	1.59853	1.59956	1.60058
0.430	1.60161	1.60253	1.60346	1.60439	1.60536	1.60630	1.60724	1.60817	1.60912	1.61007
0.440	1.61175	1.61275	1.61375	1.61475	1.61575	1.61671	1.61774	1.61873	1.61972	1.62071
0.450	1.62170	1.62259	1.62367	1.62465	1.62563	1.62661	1.62759	1.62856	1.62953	1.63051
0.460	1.63148	1.63244	1.63341	1.63437	1.63534	1.63630	1.63726	1.63822	1.63917	1.64013
0.470	1.64108	1.64203	1.64298	1.64393	1.64487	1.64582	1.64676	1.64770	1.64864	1.64958
0.480	1.65052	1.65145	1.65239	1.65332	1.65425	1.65518	1.65610	1.65703	1.65795	1.65888
0.490	1.65980	1.66072	1.66163	1.66255	1.66347	1.66438	1.66529	1.66620	1.66711	1.66802

$$2 \int_0^{\infty} R (C(R) - q^2) dR \quad \text{ET} \quad C(R) = q^2 e^{-\lambda R} \theta e^{-\lambda R}$$
[illegible]

TABULATION DE $\tilde{\chi}_{A_2}$ AVEC $A_2 = 2 \int_0^R k^2 (c(R) - q^2) dR$ ET $C(R) = q^2 e^{\Phi - \chi R}$

PUISITE	0.0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.0	0.0	0.00006	0.00020	0.00039	0.00062	0.00090	0.00122	0.00157	0.00196	0.00238
0.010	0.00283	0.000331	0.000381	0.000435	0.000491	0.000549	0.000612	0.000674	0.000740	0.000808
0.020	0.00878	0.000950	0.001025	0.001101	0.001179	0.001260	0.001342	0.001426	0.001512	0.001600
0.030	0.01689	0.001780	0.001873	0.001968	0.002064	0.002161	0.002260	0.002361	0.002463	0.002557
0.040	0.02672	0.002779	0.002887	0.002996	0.003107	0.003218	0.003332	0.003446	0.003562	0.003679
0.050	0.03797	0.003917	0.004038	0.004159	0.004282	0.004406	0.004532	0.004658	0.004785	0.004914
0.060	0.05043	0.005114	0.005306	0.005438	0.005572	0.005706	0.005842	0.005978	0.006115	0.006254
0.070	0.06393	0.006333	0.006674	0.006816	0.006959	0.007102	0.007246	0.007392	0.007538	0.007684
0.080	0.07832	0.007980	0.008130	0.008279	0.008430	0.008581	0.008733	0.008886	0.009040	0.009194
0.090	0.09349	0.009304	0.009660	0.009817	0.009975	0.010133	0.010292	0.010451	0.010611	0.010771
0.100	0.10933	0.010944	0.011257	0.011419	0.011583	0.011747	0.011911	0.012076	0.012242	0.012408
0.110	0.12574	0.012742	0.012909	0.013077	0.013246	0.013415	0.013584	0.013754	0.013924	0.014095
0.120	0.14266	0.014438	0.014610	0.014783	0.014955	0.015129	0.015302	0.015477	0.015651	0.015826
0.130	0.16001	0.016176	0.016352	0.016529	0.016705	0.016882	0.017059	0.017237	0.017415	0.017593
0.140	0.17771	0.017950	0.018129	0.018309	0.018488	0.018668	0.018848	0.019029	0.019210	0.019391
0.150	0.19512	0.019753	0.019935	0.020117	0.020299	0.020481	0.020664	0.020847	0.021030	0.021213
0.160	0.21396	0.021580	0.021764	0.021948	0.022132	0.022316	0.022500	0.022685	0.022870	0.023055
0.170	0.23240	0.023425	0.023610	0.023796	0.023981	0.024167	0.024353	0.024539	0.024725	0.024911
0.180	0.25097	0.025234	0.025470	0.025657	0.025843	0.026030	0.026217	0.026403	0.026590	0.026777
0.190	0.26964	0.027151	0.027338	0.027526	0.027713	0.027900	0.028087	0.028275	0.028462	0.028649
0.200	0.28837	0.029024	0.029211	0.029399	0.029586	0.029773	0.029961	0.030148	0.030335	0.030523
0.210	0.30710	0.030897	0.031084	0.031272	0.031459	0.031646	0.031833	0.032020	0.032207	0.032394
0.220	0.32581	0.032757	0.032954	0.033141	0.033327	0.033514	0.033700	0.033887	0.034073	0.034259
0.230	0.34445	0.034631	0.034817	0.035003	0.035188	0.035374	0.035559	0.035745	0.035930	0.036115
0.240	0.36300	0.036484	0.036659	0.036834	0.037008	0.037182	0.037356	0.037530	0.037704	0.037878
0.250	0.38141	0.038325	0.038508	0.038691	0.038874	0.039056	0.039239	0.039421	0.039603	0.039785
0.260	0.39967	0.040148	0.040330	0.040511	0.040692	0.040872	0.041053	0.041233	0.041413	0.041593
0.270	0.41773	0.041952	0.042132	0.042311	0.042489	0.042668	0.042846	0.043024	0.043202	0.043380
0.280	0.43557	0.043734	0.043911	0.044088	0.044264	0.044440	0.044616	0.044791	0.044967	0.045142
0.290	0.45317	0.045491	0.045665	0.045839	0.046013	0.046186	0.046359	0.046532	0.046704	0.046877
0.300	0.47046	0.047220	0.047391	0.047562	0.047733	0.047903	0.048073	0.048243	0.048412	0.048581
0.310	0.48750	0.048919	0.049087	0.049255	0.049422	0.049589	0.049756	0.049922	0.050089	0.050254
0.320	0.50420	0.050585	0.050750	0.050914	0.051078	0.051242	0.051405	0.051568	0.051730	0.051893
0.330	0.52054	0.052416	0.052577	0.052738	0.052898	0.053058	0.053217	0.053375	0.053533	0.053691
0.340	0.53652	0.053809	0.053967	0.054123	0.054280	0.054436	0.054592	0.054747	0.054902	0.055056
0.350	0.55210	0.055363	0.055517	0.055669	0.055822	0.055974	0.056125	0.056276	0.056427	0.056577
0.360	0.56726	0.056876	0.057025	0.057173	0.057321	0.057469	0.057616	0.057762	0.057908	0.058054
0.370	0.58200	0.058344	0.058489	0.058633	0.058776	0.058919	0.059062	0.059204	0.059345	0.059486
0.380	0.59627	0.059767	0.059907	0.060046	0.060185	0.060323	0.060461	0.060598	0.060735	0.060871
0.390	0.61007	0.061142	0.061277	0.061411	0.061545	0.061678	0.061811	0.061943	0.062075	0.062207
0.400	0.62337	0.062458	0.062597	0.062726	0.062855	0.062983	0.063111	0.063238	0.063365	0.063491
0.410	0.63616	0.063741	0.063866	0.063990	0.064113	0.064236	0.064359	0.064480	0.064602	0.064722
0.420	0.64842	0.064962	0.065081	0.065200	0.065318	0.065435	0.065552	0.065668	0.065784	0.065899
0.430	0.66014	0.065128	0.065241	0.065354	0.065466	0.065578	0.065689	0.065800	0.065910	0.066020
0.440	0.67128	0.066237	0.066344	0.066452	0.066558	0.066664	0.066769	0.066874	0.066978	0.067082
0.450	0.68185	0.066287	0.066389	0.066490	0.066591	0.066691	0.066790	0.066889	0.066987	0.067085
0.460	0.69184	0.0669278	0.0669374	0.0669469	0.0669563	0.0669657	0.0669750	0.0669843	0.0669935	0.0670026
0.470	0.70117	0.70207	0.70297	0.70385	0.70474	0.70561	0.70648	0.70734	0.70820	0.70905
0.480	0.70989	0.71073	0.71156	0.71239	0.71320	0.71401	0.71482	0.71562	0.71641	0.71719
0.490	0.71797	0.71874	0.71951	0.72027	0.72102	0.72177	0.72250	0.72324	0.72396	0.72458

ANNEXE III

CALCULS NUMERIQUES SUR P(L)

1 - DERIVATION DE P(L)

Soient x_i et y_i respectivement les arguments et les valeurs de la fonction ($i = 1, 2, \dots, n$). Sauf aux extrémités ($i = 1$ et $i = n$) les dérivées au point x_i s'estiment comme celles de la parabole passant par (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}) . Tous calculs faits on trouve :

$$\begin{aligned}
 i = 1 \quad & \begin{cases} y'(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} \\ y''(x_1) = \frac{2y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{2y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{2y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \end{cases} \\
 i = 2, \dots, n \quad & \begin{cases} y'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}} \\ y''(x_i) = \frac{2 y_{i-1}}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + \frac{2 y_i}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} \\ \quad \quad \quad + \frac{2 y_{i+1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \end{cases} \\
 i = n \quad & \begin{cases} y'(x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{y_n - y_{n-2}}{x_n - x_{n-2}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{x_{n-1} - x_{n-2}} \\ y''(x_n) = \frac{2 y_{n-2}}{(x_{n-2} - x_{n-1})(x_{n-2} - x_n)} + \frac{2 y_{n-1}}{(x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_n)} \\ \quad \quad \quad + \frac{2 y_n}{(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-1})} \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'expérience montre que pour les dérivées secondes du P(1) il est préférable de calculer d'abord la dérivée (x_i, y_i') et de lui appliquer à nouveau l'algorithme de dérivation : l'effet est régularisant.

2 - INTEGRATION DE P(L) : ETOILES

Il existe des formules assez élaborées d'intégration numérique mais elles s'appliquent à des fonctions connues en des points équidistants, ce qui n'est pas le cas de P(l) en général. On utilise ici la règle du trapèze améliorée :

$$\int_{x_0}^{x_1} y(x) dx = \frac{x_1 - x_0}{2} (y_0 + y_1) - \frac{(x_1 - x_0)^2}{12} (y'_1 - y'_0)$$

L'estimateur est très précis puisqu'il intègre exactement un polynôme du 2nd et du 3^o degré. Le fait que les dérivées ne soient ici qu'approchées n'a pas grande influence sur le terme $y'_1 - y'_0$ vu la régularité de la fonction P(l).

Pour le calcul des étoiles l'intégration porte sur des expressions du type $\int x^n y(x) dx$: il suffit d'appliquer la règle ci-dessus à la fonction $x^n y(x)$. Explicitement on trouve pour $n = 0, 1, 2$:

$$\Delta_i = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} \quad (i = 2, \dots, n)$$

$$\int_{x_1}^{x_n} y(x) dx = \sum_{i=2}^n \Delta_i [y_i + y_{i-1} + 1/3 \Delta_i (y'_{i-1} - y'_i)]$$

$$\int_{x_1}^{x_n} x y(x) dx = \sum_{i=2}^n \Delta_i [x_i y_i + x_{i-1} y_{i-1} + 1/3 \Delta_i (y_{i-1} + x_{i-1} y'_{i-1} - y_i - x_i y'_i)]$$

$$\int_{x_1}^{x_n} x^2 y(x) dx = \sum_{i=2}^n \Delta_i [x_i^2 y_i + x_{i-1}^2 y_{i-1} + 1/3 \Delta_i (2x_{i-1} y_{i-1} + x_{i-1}^2 y'_{i-1} - 2x_i y_i - x_i^2 y'_i)]$$

3 - VERIFICATION DES DERIVATIONS

En intégrant y' à l'aide de la règle du trapèze améliorée qui met en jeu y'' , et en comparant la valeur obtenue à sa valeur vraie $y_n - y_1$ on vérifie la cohérence du système y, y', y'' .

ANNEXE IV

LOI LOGNORMALE

La variable aléatoire X est lognormale si son logarithme népérien $Z = \text{Log } X$ suit une loi normale. En notant γ et σ^2 respectivement la moyenne et la variance de Z la densité de X a pour expression :

$$f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\text{Log } x - \text{Log } \gamma)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{x}$$

le changement de variable $z = \frac{1}{\sigma} \text{Log } \frac{x}{\gamma}$ ramène à la loi normale centrée réduite.

Moments de la granulométrie en nombre

Le moment d'ordre n de $f(x)$ s'écrit :

$$m_n = \gamma^n e^{\frac{n^2 \sigma^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} m_1 &= \gamma e^{\frac{\sigma^2}{2}} \\ m_2 &= \gamma^2 e^{2\sigma^2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \text{variance arithmétique : } \Sigma^2 = m_1^2 (e^{\sigma^2} - 1) \\ \text{variance relative : } r = e^{\sigma^2} - 1 \end{cases}$$

Moments de la granulométrie en longueur

$$\mathcal{K}_n = \frac{E(X^{n+1})}{E(X)} = \frac{\gamma^{n+1} e^{\frac{(n+1)^2 \sigma^2}{2}}}{\gamma e^{\frac{\sigma^2}{2}}} = \gamma^n e^{n(n+2) \frac{\sigma^2}{2}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \gamma e^{\frac{3\sigma^2}{2}} \\ \mathcal{K}_2 &= \gamma^2 e^{4\sigma^2} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \text{variance arithmétique : } \Sigma'^2 = \mathcal{K}_1^2 [e^{\sigma^2} - 1] \\ \text{variance relative : } r' = e^{\sigma^2} - 1 \end{cases}$$

On constate que $r' = r$. La variance relative n'est pas altérée par pondération de la fréquence par x .

De façon générale la pondération de $f(x)$ par x^n donne une loi également lognormale de variance logarithmique inchangée et de moyenne logarithmique multipliée par $e^{n\sigma^2}$:

$$\begin{cases} \gamma_n = \gamma e^{n\sigma^2} \\ \sigma_n^2 = \sigma^2 \end{cases}$$

ANNEXE V

GRANULOMETRIES LINEAIRES GAMMA

La loi gamma d'ordre α et de paramètre b a pour densité :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-bx} & x \geq 0 \\ f(x) &= 0 & x < 0 \end{aligned}$$

• Pondération par x

La loi reste dans la même famille

$$g(x) = \frac{x f(x)}{E(x)} = \frac{b^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-bx}$$

Si la granulométrie en nombre est une loi gamma (b, α) la granulométrie en mesure est une loi gamma $(b, \alpha+1)$.

• Moments

Le moment μ ($\mu > 0$) s'écrit :

$$E(X^\mu) = b^{-\mu} \frac{\Gamma(\alpha+\mu)}{\Gamma(\alpha)}$$

NOMBRE

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{\alpha}{b} & \sigma^2 &= \frac{\alpha}{b^2} \\ m_2 &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{b^2} & r = \frac{\sigma^2}{m_1^2} &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

LONGUEUR

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1 &= \frac{\alpha+1}{b} & \Sigma^2 &= \frac{\alpha+1}{b^2} \\ \mathcal{N}_2 &= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{b^2} & R = \frac{\Sigma^2}{\mathcal{N}_1^2} &= \frac{1}{\alpha+1} \end{aligned}$$

• Estimation des paramètres

En principe si l'on dispose de n tirages indépendants de la variable aléatoire X supposée suivre une loi gamma la meilleure estimation des paramètres de cette loi s'obtient par la méthode du maximum de vraisemblance. Mais ici le problème se pose autrement.

On peut prendre pour estimateurs :

$$\alpha = \frac{m_1^2}{\sigma^2} = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad b = \frac{m_1}{\sigma^2}$$

Mais m_1 et σ^2 font intervenir $P'(0)$ dont la détermination n'est pas très précise. Aussi vaut-il mieux raisonner sur la granulométrie en mesure et poser :

$$\alpha+1 = \frac{\mathcal{H}_1^2}{\Sigma^2} = \frac{1}{R} \quad b = \frac{\mathcal{H}_1}{\Sigma^2}$$

• Tests

Pour se rendre compte rapidement de la plausibilité de l'hypothèse d'une loi gamma on peut utiliser sa propriété de stabilité par pondération. On a en effet :

$$\frac{\mathcal{H}_1}{m_1} = \frac{\Sigma^2}{\sigma^2} = \frac{r}{R} = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

Si les valeurs expérimentales sont à peu près en accord avec ces égalités il convient de vérifier le caractère gamma sur la courbe elle-même.

Deux cas se présentent : α entier ou non entier.

1/ α entier ($\alpha = n$)

Il est possible de remonter à l'expression analytique de $P(1)$ et de tester l'ajustement sur cette fonction ce qui est bien meilleur que de le faire sur $P''(1)$. Un calcul simple donne :

$$P(1) = p e^{-b1} \left[1 + \frac{n-1}{n} \frac{b1}{1!} + \dots + \frac{n-k}{n} \frac{(b1)^k}{k} + \dots + \frac{1}{n} \frac{(b1)^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

$$n = 1 \quad P(1) = p e^{-b1} \quad \text{exponentielle}$$

$$n = 2 \quad P(1) = p e^{-b1} \left[1 + \frac{b1}{2} \right]$$

$$n = 3 \quad P(1) = p e^{-b1} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{b1}{2} + \frac{(b1)^2}{6} \right]$$

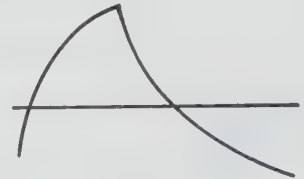
2/ α non entier

Il faut comparer l'ajustement à $-\frac{P''(1)}{P'(0)} = f(1)$ ou se ramener au cas précédent en considérant l'entier le plus proche.

ANNEXE VI

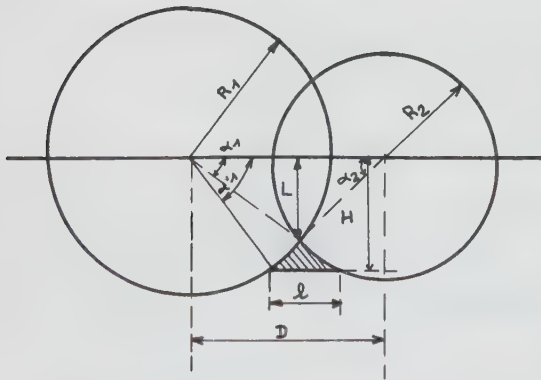
ANGLES

On suppose que les angles curvilignes sont l'intersection d'arcs de cercle de rayons R_1 et R_2 . Le calcul est fait pour une sécante orientée préférentiellement par rapport à l'axe de symétrie de la figure (parallèle ou perpendiculaire).



C'est dans ce cas que le contour apparent offert aux traversées de longueur inférieure à l est maximum et on obtient ainsi les termes de plus bas degré en l^α .

1/ Angle curviligne à bords concaves



On suppose que localement les rayons de courbure sont R_1 et R_2 , négatifs. D est la distance des centres de courbure L et H sont indiqués sur la figure.

On a :

$$\begin{cases} R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2 = D \\ R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2 = L \\ l + R_1 \cos \alpha_1' + R_2 \cos \alpha_2' = D \\ R_1 \sin \alpha_1' = R_2 \sin \alpha_2' = H \end{cases}$$

D'où :

$$l = R_1 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{L}{R_1}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{R_1}\right)^2} \right] + R_2 \left[\sqrt{1 - \left(\frac{L}{R_2}\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{H}{R_2}\right)^2} \right]$$

Mais $h = H - L$

$$l = \sqrt{R_1^2 - L^2} + \sqrt{R_2^2 - L^2} - (\sqrt{R_1^2 - (L+h)^2} + \sqrt{R_2^2 - (L+h)^2})$$

Dérivons par rapport à l en considérant h comme fonction implicite de l :

$$1 = \frac{(L+h)h'(l)}{[R_1^2 - (L+h)^2]^{1/2}} + \frac{(L+h)h'(l)}{[R_2^2 - (L+h)^2]^{1/2}}$$

donc

$$h'(0) = \frac{1}{L \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 - L^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_2^2 - L^2}} \right)} = \frac{1}{AL} > 0 \text{ avec } A = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 - L^2}} + \frac{1}{\sqrt{R_2^2 - L^2}}$$

En dérivant une seconde fois :

$$h''(0) = -h'(0)^2 \left[\frac{A+BL^2}{AL} \right] = \frac{1}{A^2 L} \left[\frac{B}{A} + \frac{1}{L^2} \right] < 0$$

$$\text{avec } B = \frac{1}{(R_1^2 - L^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R_2^2 - L^2)^{3/2}}$$

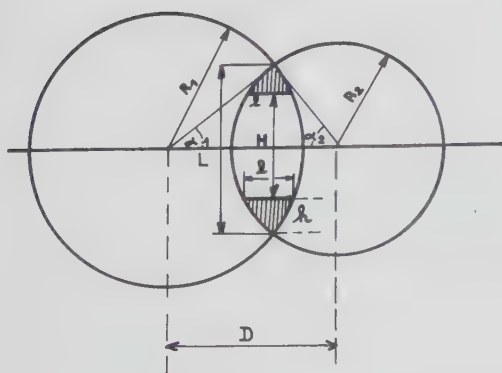
conclusion

$$f(0) = \frac{C}{AL} > 0$$

C : constante de proportionnalité

$$f'(0) = -\frac{C}{A^2 L} \left[\frac{B}{A} + \frac{1}{L^2} \right] < 0$$

2/ Angle curviligne à bords convexes



$$\begin{cases} \frac{L}{2} = R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2 \\ R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2 = D \end{cases}$$

De même H s'évalue comme le contour apparent de l'intersection des 2 cercles distants de $D+l$

D'où le système :

$$\begin{cases} R_1 \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2R_1}\right)^2} + R_2 \sqrt{1 - \left(\frac{L}{2R_2}\right)^2} = D \\ R_1 \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2R_1}\right)^2} + R_2 \sqrt{1 - \left(\frac{H}{2R_2}\right)^2} = D+l \end{cases}$$

En posant $h = \frac{L-H}{2}$ on tire :

$$2l = \sqrt{4R_1^2 - (L-2h)^2} + \sqrt{4R_2^2 - (L-2h)^2} - (\sqrt{4R_1^2 - L^2} + \sqrt{4R_2^2 - L^2})$$

En dérivant par rapport à l

$$2 = 2h'(l)(L-2h) \left[\frac{1}{[4R_1^2 - (L-2h)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[4R_2^2 - (L-2h)^2]^{1/2}} \right]$$

d'où $h'(0) = \frac{1}{AL}$ avec $A = \frac{1}{\sqrt{4R_1^2 - L^2}} + \frac{1}{\sqrt{4R_2^2 - L^2}}$

$$0 = [h''(l)(L-2h) - 2h'^2(l)] \left[\frac{1}{[4R_1^2 - (L-2h)^2]^{1/2}} + \frac{1}{[4R_2^2 - (L-2h)^2]^{1/2}} \right] - 2h'^2(l)(L-2h)^2 \left[\frac{1}{[4R_1^2 - (L-2h)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[4R_2^2 - (L-2h)^2]^{3/2}} \right]$$

$$h''(0) = 2h'^2(0) \left[\frac{1}{L} + \frac{BL}{A} \right] \text{ soit } h''(0) = \frac{2}{A^2 L} \left[\frac{B}{A} + \frac{1}{L^2} \right] > 0$$

En posant $B = \frac{1}{[4R_1^2 - L^2]^{3/2}} + \frac{1}{[4R_2^2 - L^2]^{3/2}}$

Conclusion

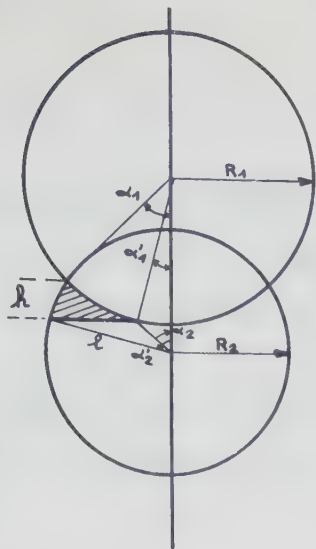
C : constante de proportionnalité

$$f(0) = \frac{C}{AL} > 0$$

$$f'(0) = \frac{2C}{A^2 L} \left[\frac{B}{A} + \frac{1}{L^2} \right] > 0$$

3/ Angles curvilignes concavo-convexe

On a vu qu'un angle curviligne a bords concaves donne $f(0) \neq 0$ et $f'(0) < 0$ et qu'un angle à bords convexes donne $f(0) \neq 0$ et $f'(0) > 0$. Il est intuitif qu'un angle concave-convexe va donner $f(0) \neq 0$ et $f'(0)$ positif ou négatif selon les cas.



a - grand rayon de courbure négatif

Soient α_1 et α_2 les angles entre la droite des centres et les rayons joignant ceux-ci au point d'intersection des cercles. α'_1 et α'_2 correspondent eux aux extrémités de la traversée de longueur l . On a :

$$\begin{cases} R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2 \\ l = R_2 \sin \alpha'_2 - R_1 \sin \alpha'_1 \\ h = R_1 (\cos \alpha'_1 - \cos \alpha_1) = R_2 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha'_2) \end{cases}$$

D'où l'on tire :

$$l = R_2 \sqrt{1 - (\cos \alpha_2 - \frac{h}{R_2})^2} - R_1 \sqrt{1 - (\cos \alpha_1 + \frac{h}{R_1})^2}$$

Dérivant en l

$$1 = h'(l) \left[\frac{\cos \alpha_2 - \frac{h}{R_2}}{[1 - (\cos \alpha_2 - \frac{h}{R_2})^2]^{1/2}} + \frac{\cos \alpha_1 + \frac{h}{R_1}}{[1 - (\cos \alpha_1 + \frac{h}{R_1})^2]^{1/2}} \right]$$

$$\text{en } l = 0 \quad h'(0) = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} > 0$$

$$\begin{aligned} 0 = h''(l) & \left[\frac{\cos \alpha_2 - \frac{h}{R_2}}{[1 - (\cos \alpha_2 - \frac{h}{R_2})^2]^{1/2}} + \frac{\cos \alpha_1 + \frac{h}{R_1}}{[1 - (\cos \alpha_1 + \frac{h}{R_1})^2]^{1/2}} \right] \\ & - \frac{h'^2(l)}{R_2 [1 - (\cos \alpha_2 - \frac{h}{R_2})^2]^{1/2}} \left[1 + \frac{(\cos \alpha_2 - \frac{h}{R_2})^2}{1 - (\cos \alpha_2 - \frac{h}{R_2})^2} \right] \\ & + \frac{h'^2(l)}{R_1 [1 - (\cos \alpha_1 + \frac{h}{R_1})^2]^{1/2}} \left[1 - \frac{(\cos \alpha_1 + \frac{h}{R_1})^2}{1 - (\cos \alpha_1 + \frac{h}{R_1})^2} \right] \end{aligned}$$

$$\text{D'où } h''(0) = \frac{R_1 \sin^3 \alpha_1 - R_2 \sin^3 \alpha_2}{R_1 R_2 \sin^3(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{comme } R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2$$

$$h''(0) = \frac{\sin \alpha_1 (\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2)}{\sin^3(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \text{Ici } R_1 > R_2 \text{ donc } \sin \alpha_1 < \sin \alpha_2$$

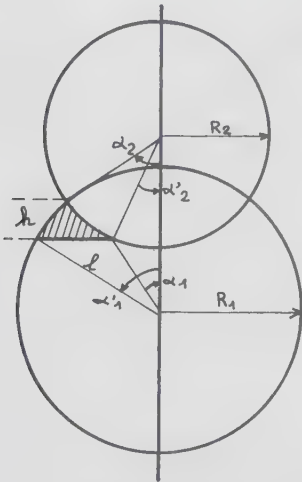
Conclusion

C : constante de proportionnalité.

$$f(0) = C \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} > 0 \quad \text{si } R_1 < 0$$

$$f'(0) = C \frac{\sin \alpha_1 (\sin^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_2)}{R_2 \sin^3(\alpha_1 + \alpha_2)} < 0 \quad \begin{matrix} R_2 > 0 \\ |R_1| > |R_2| \end{matrix}$$

b - Grand rayon de courbure positif



Avec les mêmes notations que précédemment :

$$\begin{cases} R_1 \sin \alpha_1 = R_2 \sin \alpha_2 \\ l = R_1 \sin \alpha_1' - R_2 \sin \alpha_2' \\ h = R_1 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_1') = R_2 (\cos \alpha_2' - \cos \alpha_2) \end{cases}$$

Ce système est identique au précédent en permutant les indices 1 et 2.

Conclusion

C : constante de proportionnalité

$$f(0) = C \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} > 0 \quad \text{si } R_1 > 0$$

$$f'(0) = C \frac{\sin \alpha_2 (\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1)}{R_2 \sin^3(\alpha_1 + \alpha_2)} > 0 \quad \begin{matrix} R_2 < 0 \\ |R_1| > |R_2| \end{matrix}$$

ANNEXE VII

DISTANCES

1 - DISTANCE DE HAUSDORFF

La distance de HAUSDORFF est très générale et habituellement utilisée en géométrie intégrale.

Soient A et B deux compacts de $\mathbb{R}^n$. On note A_ρ le dilaté de A par la boule de rayon ρ : $A_\rho = A \oplus \rho K$ (K , boule unité est symétrique : $K = \check{K}$)

La distance de HAUSDORFF est par définition :

$$d(A,B) = \inf \{ \rho : \rho \geq 0, A_\rho \sim A' \supset B, B_\rho \sim B' \supset A \}$$

L'équivalence notée $\sim$ entre deux ensembles signifie qu'il sont translatés l'un de l'autre.

La distance entre A et B est donc le plus petit ρ tel qu'à une translation près le dilaté A_ρ contienne B et le dilaté B_ρ contienne A.

Si K_1 et K_2 désignent les boules inscrites et circonscrites, de rayons respectifs R_1 et R_2 on a :

$$d(A, K_1) = R_2 - R_1$$

En effet $A_\rho \supset K_1 \quad \forall \quad \rho \geq 0$ et le plus petit $\rho > 0$ tel que $K_1 \oplus \rho K \supset A$ est tel que $R_1 + \rho = R_2$, c'est-à-dire $\rho = R_2 - R_1$.

Avec la boule circonscrite il n'y a pas de résultat aussi simple. L'égalité $d(A, K_2) = R_2 - R_1$ n'est pas vérifiée en général. (Ex : couronne circulaire).

En posant :

$$\psi = 1 - \frac{d(A, K_1)}{R_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

on trouve l'indice de RILEY. Mais la distance de HAUSDORFF, bien que constituant un outil topologique fondamental de la géométrie intégrale, ne fait pas intervenir de grandeur additive et n'est pas accessible expérimentalement sur l'A.T.

Considérons donc une autre distance, moins puissante mathématiquement car elle n'agit que sur des ensembles ordonnés par la relation d'ordre qu'est l'inclusion, mais plus commode pour le problème actuel.

2 - DISTANCE VOLUMIQUE

Soient A et B deux compacts de mesure non nulle satisfaisant l'une ou l'autre des inclusions : $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Si l'on raisonne sur les classes d'équivalence des ensembles égaux à un ensemble de mesure nulle près, l'application

$$d(A,B) = |V(A) - V(B)|$$

de $\mathcal{F}_0 \times \mathcal{F}_0$ dans $\mathbb{R}$ est une distance.

$\mathcal{F}_0$: sous ensemble ordonné de $\mathcal{K}_0$: ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$.

De même que précédemment on peut construire un indice de forme :

si $B \subset A$

$$\psi = 1 - \frac{d(A,B)}{V(A)} = \frac{V(B)}{V(A)}$$

ANNEXE VIII

FORME ET TAILLE

Nous avons en introduction défini la forme comme une structure stable par similitude. Donc des ensembles ayant même forme peuvent différer :

- par l'orientation (rotation)
- par la taille (homothétie)
- par la position dans l'espace (translation) mais la position n'a pas réellement d'importance puisqu'on considère des phénomènes stationnaires.

S'il s'agit d'étudier exclusivement la taille des grains, définie d'une manière quelconque d'ailleurs, et ceci semble être le but des diverses études granulométriques, il faut effectivement isoler le facteur taille, et pour cela éliminer l'influence de la forme et de l'orientation.

En toute rigueur pour la granulométrie telle qu'elle est définie en Morphologie Mathématique ceci n'est possible que dans le cas très particulier d'une population de grains convexes ayant tous même forme et même orientation ; l'élément structurant doit avoir la forme et l'orientation commune des grains . La granulométrie est alors la répartition des facteurs d'homothétie. En effet dans ce cas l'indice de forme Ψ vaut 1 et $G(\lambda)$ est confondue avec $\phi_k(\lambda)$.

En général, il n'en est pas ainsi et l'indice Ψ mesure l'influence de la forme et de l'orientation. Si l'on veut une granulométrie indépendante de l'orientation il faut prendre un élément structurant B lui-même indépendant de l'orientation, donc une boule.

A titre d'exemple considérons une population de carrés identiques de côté a . Soit B l'élément structurant : un cercle.

$$\text{La sphéricité moyenne est } \Psi = \frac{\pi a^2}{4 a^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\phi(d_\lambda) = \delta \frac{a}{2} \text{ Dirac concentré en } \frac{a}{2} \rightarrow \phi_k(d_\lambda) = \delta\left(\frac{a}{2}\right) \times \frac{4 \lambda^2}{a^2}$$

La mesure $H(d_\lambda)$ se calcule aisément :

$$V(A) - V(A\omega_\lambda) = 4 \left(\lambda^2 - \frac{\pi}{4} \lambda^2 \right) = 4 \lambda^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow$$



$$H(d\lambda) = \frac{8}{a^2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \lambda d\lambda$$

Donc :

$$G(d\lambda) = \pi \frac{\lambda^2}{a^2} \delta\left(\frac{a}{2}\right) + 8 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{\lambda d\lambda}{a^2}$$

Calculons la moyenne et la variance de G .

$$E(\lambda) = \int \lambda G(d\lambda) = \frac{\pi a}{8} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{a}{3} = \frac{a}{3} \left(1 + \frac{\pi}{8} \right) \approx 0,464 a$$

$$E(\lambda^2) = \int \lambda^2 G(d\lambda) = \frac{\pi a^2}{16} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{8} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$D^2(\lambda) = E(\lambda^2) - [E(\lambda)]^2 = \frac{a^2}{72} \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \approx 7,66 \cdot 10^{-3} a^2$$

Ainsi la moyenne des tailles n'est pas $\frac{a}{2}$ et la variance n'est pas nulle bien que les carrés soient tous identiques. On remarque cependant que cette variance est faible : c'est que le carré a une sphéricité assez bonne. Des formes moins sphériques auraient donné des résultats plus mauvais.

ANNEXE IX

1 - GRANULOMETRIE DES TAILLES DES B_λ INSCRITS

$$B_\lambda \text{ inscrit dans } A_i \Leftrightarrow \begin{cases} A_i \ominus \check{B}_\lambda \neq \emptyset \\ A_i \ominus \check{B}_{\lambda+d_\lambda} = \emptyset \end{cases}$$

Physiquement cela n'a de sens de parler de figure maximale B inscrite que si les grains A_i restent connexes par érosion, c'est-à-dire si $\lambda > 0$, $A \ominus \check{B}_\lambda$ est connexe.

Alors il est certain que le nombre de composantes connexes de l'ensemble $A \ominus \check{B}_\lambda$ est une fonction décroissante de λ . On pose :

$$1 - \phi(\lambda) = \frac{N(A \ominus \check{B}_\lambda)}{N[A]}$$

C'est la probabilité comptée en nombre, qu'un B inscrit ait la taille supérieure à λ . L'hypothèse de connexité par érosion assure à $\phi(\lambda)$ les propriétés d'une fonction de répartition.

2 - INTERPRETATION DE LA MESURE $H(\lambda)$

Pour interpréter la mesure H on forme l'équation (1) directement. A cet effet on remarque qu'il existe 2 sortes de grains :

- ceux de taille inférieure à λ , soit A_1 leur ensemble.

$$A_1 = \bigcup_{i \in I_1} A_i$$

- ceux de taille supérieure ou égale à λ , soit A_2 .

$$A_2 = \bigcup_{i \in I_2} A_j$$

d'où :

$$V(A) G(\lambda) = V(A) - V(A\omega_\lambda) = \underbrace{\sum_{i \in I_1} V(A_i)}_{\text{grains disparus}} + \underbrace{\sum_{j \in I_2} [V(A_j) - V(A_{j\omega_\lambda})]}_{\text{grains érodés}}$$

Mais par définition de H :

$$V(A) G(\lambda) = \sum_{i \in I_1} V(B_i) + H(\lambda) \Rightarrow H(\lambda) = \sum_{i \in I_1} [V(A_i) - V(B_i)] + \sum_{j \in I_2} [V(A_j) - V(A_{j\omega_\lambda})]$$

Comme Ψ_1 , sphéricité moyenne de A_1 (indice de forme moyen), est :

$$\frac{\sum_{i \in I_1} [V(A_i) - V(B_i)]}{\sum_{i \in I_1} V(A_i)}$$

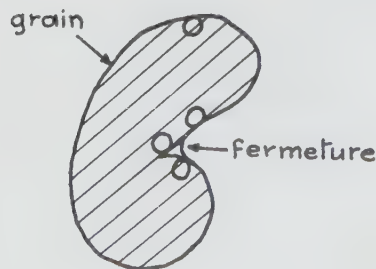
on a :

$$V(A) H(\lambda) = \Psi_1 V(A_1) + \sum_{j \in I_2} [V(A_j) - V(A_{j\omega_\lambda})]$$

= résidu granulométrique + volume des parties
total de A_1 anguleuses de A_2

3 - DEFINITION DE L'ARRONDI

Nous avons défini un grain arrondi A par l'égalité $A\omega_\lambda = A$. Il s'agit d'un arrondi des parties convexes. Car par exemple le grain ci-dessous est considéré comme arrondi bien que possédant un angle, mais rentrant.



Si l'on exige également un arrondi des parties concaves il faut poser :

$$A\omega = A$$

$$Af = A \quad Af : \text{fermeture de } A.$$

La fermeture des grains étant l'ouverture des pores, on accède à cette fermeture par la granulométrie des pores. L'angulosité se caractérise alors par la mesure totale des parties anguleuses.

B I B L I O G R A P H I E

Sont numérotés uniquement les ouvrages ou articles dont il est fait mention dans le texte

MORPHOLOGIE MATHÉMATIQUE ET SUJETS VOISINS

1 - Ouvrages généraux

MATHERON G.

- [1] - Éléments pour une théorie des milieux poreux
Masson et C^o - 1967
- [2] - Théorie des Ensembles Aléatoires
Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fasc. IV
Edité par l'E.N.S.M.P. 1969
- [3] - Les variables régionalisées et leur estimation
Masson et C^o - 1965

SERRA J.

- [4] - Introduction à la Morphologie Mathématique
Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, Fasc. III
Edité par l'E.N.S.M.P. - 1969

HADWIGER H.

- [5] - Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie
Springer-Verlag - 1957

2 - Articles et rapports

BENZECRI J.P.

- [6] - Notion de forme - Codage des figures planes - Algorithme
Cours photocopié.

CAUWE Ph. R. and J.A. DE CUYPER

- Model and a comminution size - distribution equation by
application of Mathematical Morphology
Colloque Européen de Fragmentation - Bruxelles Oct. 1970

DELFINER P. (rapports internes non publiés)

- [7] - Sphéricité, rondeur et indices de forme en général
- [8] - Propriétés de la loi du premier point de contact
- [9] - Le schéma booléen-poissonien
 - Exploitation des diagrammes P.P.S. à l'Analyseur de Textures

FINNEY J.

- [10] - L'état Liquide
La Recherche n^o 4 - Sept. 1970 p. 336-350

FONCK J.M.

- [11] - Estimation géostatistique du réservoir d'Hassi-Messaoud
Rapports internes C.F.P. et thèse à paraître.

FRIED J.

- Essai d'interprétation de l'hypothèse ergodique dans les milieux poreux (en collab. avec G. IFKER)

HAAS A.

- [14] - Morphologie Mathématique et granulométrie en place
(en collab. avec G. MATHERON et J. SERRA)
Annales des Mines - Déc. 1967
- Contribution de la Morphologie Mathématique à l'étude des "Mixtes" produits au cours de la valorisation d'un minerai
Rapport IRSID PPC 68 - RI 87 (9301-13)
 - Contribution à l'étude de la structure des grains d'un métal
Rapport IRSID PPC 68 - RI 80 (9326-31)

IFKER G.Y. (rapports internes non publiés)

- Changements d'échelle dans les milieux poreux
- Essai d'interprétation de l'hypothèse ergodique dans la théorie des milieux poreux (en collaboration avec J. FRIED)
- Existence de barrières imperméables dans une structure booléenne de silts à deux ou trois dimensions

KLEIN J.C.

- [12] - Automatisation de mesures morphologiques bi-dimensionnelles
Thèse C.N.A.M. - 1971
- Mesures granulométriques au moyen de l'Analyseur de Textures
Congrès de l'Industrie Minérale, Section Minéralurgie,
Orléans - 1970

LAVERGNE J.P.

- [13] - Granulométrie de ciments par analyse morphologique
Congrès de l'Industrie Minérale, Section Minéralurgie,
Orléans - 1970

MATHERON G.

- [14] - Morphologie Mathématique et granulométrie en place
(en collab. avec A. HAAS et J. SERRA)
Annales des Mines, Déc. 1967
- Structure et composition des perméabilités
Rev. I.F.P., vol. XXI, N° 4 Avril 1966, p. 564-580
 - Genèse et signification énergétique de la loi de Darcy
Rev. I.F.P., vol. XXI, N° 11, Nov. 1966, p. 1697-1706
 - Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène :
Méthode de Schwydlar et règles de pondération
Rev. I.F.P., vol. XXII, N° 3, Mars 1967, p. 443-466

- Composition des perméabilités en milieu poreux hétérogène :
Critique de la règle de pondération géométrique
Rev. I.F.P., vol. XXIII, n° 2, Fév. 1968, p. 201-218
- [15] - Les polyèdres poissonniens isotropes
Communication au 3° Symposium Européen sur la Fragmentation
Cannes - Oct. 1970
- Polyèdres poissonniens et ensembles semi-markoviens
A paraître dans Advances in Applied Probability
- [16] - Applications croissantes et granulométries (rapport interne)
- [17] - Ensembles aléatoires et géométrie intégrale (rapport interne)
- [18] - Exercices sur les grandes mailles (rapport interne)

SERRA J.

- [14] - Morphologie Mathématique et granulométries en place
(en collab. avec A. HAAS et G. MATHERON)
Annales des Mines, Déc. 1967
- Remarques sur une lame mince de minerai lorrain
Bulletin du B.R.G.M. N° 6 - Déc. 1966
- Buts et réalisation de l'Analyseur de Textures
Rev. Industrie Minérale - Sept. 1967
- [19] - Les structures gigognes : Morphologie Mathématique et
interprétation métallogénique
Mineralium Deposita N° 3 - 1968 p. 135-154
- [20] - Morphologie Mathématique et genèse de concrétions carbonatées
des minerais de fer de Lorraine
Sedimentology - 10 - 1968 - p. 183-208
- Le concept de granulométrie
Congrès de l'Industrie Minérale, Section Minéralurgie,
Orléans - Sept. 1970

En stéréologie on peut consulter les deux ouvrages suivants :

DE HOFF T. and RHINES H.

- Quantitative microscopy
Mc Graw Hill Book Company - 1968

WEIBEL E.R. and ELIAS H.

- Quantitative Methods in Morphology
Quantitative Methoden in der Morphologie
Springer-Verlag - 1967

PETROGRAPHIE - MILIEUX POREUX - ECOULEMENTS

1 - Ouvrages généraux

CARMAN P.C.

- Flow of gases through Porous Media
Academic Press - New-York 1956 - 182 p.

ENGELHARDT N. VON

- Der Porenraum der Sedimente
Berlin, Springer-Verlag - 1960

KRUMBEIN W.C. and PETTIJOHN F.J.

- [21] - Manual of sedimentary petrography
New-York, Appliton - Century Crofts - 1938

PETTIJOHN F.J.

- [22] - Sedimentary Rocks
Harper and Brothers - New-York - 1957

PERRODON A.

- Geologie du Pétrole
P.U.F. Paris - 1966

STRAKHOV N.M.

- [23] - Méthodes d'études des roches sédimentaires
Moscou 1957 (Traduction B.R.G.M.)

2 - Articles et rapports

ABOAV D.A. and T.G. LANGDON

- The distribution of Grain diameters in polycrystalline
Magnesium oxide
Metallography, 1, 1969, p. 343-340

ARCHIE G.E.

- [24] - Electrical Resistivity as an aid in Core Analysis Interpretation
Trans. AIME 146,54

AUFRIEHT W.R.

- The relationship of reservoir permeability to measured labora-
tory permeability
Canadian well logging Society Journal vol. 1, N° 1 Dec. 68
p. 15-29

BOGGS Sam Jr.

- Measurement of roundness and sphericity parameters using an
electronic particle size analysis
Journ. Sedim. Petr. vol. 37 - N° 3 p. 908-913

BLAKE

- [25] - Trans. Amer. Inst. Chem. Engrs 14,415

CAILLEUX A., TRICART J.

- Initiation à l'étude des sables et des galets
C.D.U. 1963

CARMAN P.C.

- [26] - Fluid flow through granular beds
Trans. Inst. Chem. Engrs (London) 1937 - 15 p. 150-166
- The determination of the specific surface of powders
1° J. Soc. Chem. Ind, 57,225. 1938 ; 2° J. Soc. Chem. Ind.
58,1,1939

CHOQUETTE Philip W. and Lloyd C. PRAY

- [27] - Geologic nomenclature and classification of porosity in
sedimentary carbonates
The Am. Ass. Petr. Geol. Bull. V. 54-N° 2 (feb.70) p. 207-250

CORNELL D. and D.L. KATZ

- [28] - Ind. Eng. Chem. 1953, 45, 2145

ETIENNE J. et J. LE FOURNIER

- [29] - Application des résines synthétiques colorées pour l'étude
des propriétés-réservoir des roches en lames minces
Rev. I.F.P. vol. XXII, N° 4 - Avril 1967

GONI J., J.P. RAGOT, A. SIMA

- [30] - Méthodes d'étude du champ microfissural des minéraux et des
roches et possibilités d'application en géologie
Bull. du B.R.G.M. - 2° série - N° 4

HUANG J.H. and T.L. RAMSEY

- Fluid flow in Porous Media - Diffusion and flow of
Nitrogen Gas in Natural Rocks
Jour. of Geoph. Res. Vol. 73, N° 24, Dec. 68

HUBBERT K.M.

- [31] - Darcy's law and the field equations of the flow of underground
fluids
J.P.T. October 1956 - p. 226

JACQUIN C.

- [32] - Correlations entre la perméabilité et les caractéristiques
géométriques du grès de Fontainebleau
Rev. I.F.P. Juillet-Août 1964 - p. 921-937
- [33] - Etude des écoulements et des équilibres de fluides dans les
sables argileux
Rev. I.F.P. Avril 1965 - P. 1-49

- [34] - JOURNEES de la Société de l'Industrie Minérale, Section
Minéralurgie - Orléans Sept. 1970

KOZENY J.

- [35] - Stz. ber. Akad. Wiss. Wien, Abt IIa, 136,271

KRUMBEIN W.C.

- [36] - Measurement and geological significance of shape and roundness of sedimentary particles
Journ. Sed. Petr. 1941, V-II, p. 64-72

Mme LARDE, J. BRIANT, J. LABRID, C. MARLE

- Quelques aspects des phénomènes interfaciaux dans le déplacement de l'huile par l'eau en milieu poreux
Rev. I.F.P. Fev. 1965 p. 253-279

LUDWICK John C. and Patricia L. HENDERSON

- Particle shape and inference of size from sieving
Sedimentology, vol. 11, N° 3/4 - Déc. 1968

MARLE C.

- [37] - Ecoulements monophasiques en milieu poreux
Rev. I.F.P. Oct. 1967 - P. 1471-1509

PASSEGA R., BYRAMJEE R.

- Image granulométrique des sédiments clastiques
DCEP 25 - Mai 1968 (C.F.P. Rapport interne)

POTTIER J., C. JACQUIN, C. MARLE, I. MONTADERT

- Méthodes et moyens pour l'étude des milieux poreux naturels
Rev. I.F.P. vol. XIX, N° 7-8 Juillet-Aout 1964

RILEY N.A.

- [38] - Projection sphericity
Journ. Sedimentary Petrology 1941, V-II, p. 94-97

ROSE W.D. and BRUCE W.R.

- [39] - Trans. Am. Inst. Mining Met. Engrs 1949 - 186,127

SPECIFICATIONS présentés par le groupe pétrophysique

- [40] - Rev. I.F.P. Janvier 1967 - p. 7-26

VAN DAM J.

- La migration des hydrocarbures dans une nappe aquifère
1 : L'Eau, Nov. 1969 p. 531-541 ; 2 : L'Eau, Déc. 69 p. 581-588

WADELL H.A.

- [41] - Volume, shape, and roundness of rock particles
Journ. Geology 1932 V.40, p. 443-451

- Sphericity and roundness of rock particles
Journ. Geology 1938, V. 41, p. 310-331
- Volume, shape, and roundness of quartz particles
Journ. Geology, 1935, V.43, p. 250-280

WYLLIE M.R.J. and A.R. GREGORY

- [42] - Fluid flow through unconsolidated porous aggregates.
Effect of porosity and particle shape on KOZENY-CARMAN
constants
Industrial and Engineering chemistry - Juil. 1955 p. 1379-1388

WYLLIE M.R.J. and W.D. ROSE

- [43] - Some theoretical considerations related to the quantitative
evaluation of the physical characteristics of reservoir rock
from electrical Log data
Trans. AIME 189-105

VISUALISATION

1 - Ouvrages généraux : Optique - Fluorescence

BERNARD R.

- La luminescence
P.U.F. Que sais-je ? 1961

BRUHAT

- Optique
Masson 1965

CLARK G.L.

- The encyclopedia of microscopy
Rheinhold Publishing Corporation - New-York - 1961

MONOD-HERZEN

- [44] - Luminescence - L'électron et la matière - Matière et
photoluminescence
DUNOD - 66

PRINGSHEJM P.

- Fluorescence and phosphorescence
Interscience Publishers Inc. N.Y. 1949

2 - Articles

COY-YLL R.

- Quelques aspects de la cathodoluminescence des minéraux
chem. Geol 5 (1969/1970) p. 243-254

DESBRANDES R.

- Emploi d'une technique de préparation et d'examen des structures
métallographiques sur matériel en service par la méthode des
répliques.
Rev. I.F.P. Juillet-Août 1968 - p. 863-936

ETIENNE J.

- Contribution du Laboratoire de la Compagnie d'Exploration Pétrolière à la mise au point de techniques sédimentologiques
Rev. I.F.P. Avril 1960 p. 655-679

- [45] - Techniques d'imprégnation de roches par des résines colorées pour l'étude de la porosité en lame mince
Rev. I.F.P. - Avril 1963 - p. 611-621

ETIENNE J. et J. LE FOURNIER

- [29] - Application des résines synthétiques colorées pour l'étude des propriétés-réservoir des roches en lames minces
Rev. I.F.P. Avril 1967 - p. 595-629

HOUAREAU C.

- [46] - Procédé de mesure en continu de la porosité des roches
Bull. Centre Rech. Pau. S.N.P.A., vol. II, N° 2 - Nov. 1968

LE FOURNIER

- Méthode d'étude en plaques minces des phénomènes capillaires dans les milieux poreux
Rev. des Techniciens du Pétrole N° 175 - Janvier 1966

LEITZ

- [47] - Mitteilungen für Wissenschaft und Technik
Bd IV/N 8
- [48] - Dispositif de Microscopie de Fluorescence (brochure)

LONG J.V.P.

- The cathodoluminescence of minerals in thin section
Mineralogical Magazine vol. 34 - 1965

SCHREIBER W.F.

- [49] - Picture coding
Proceedings of the IEEE, vol. 55, N° 3, March 1967

SIPPEL R.F.

- Simple device for luminescence petrography
Rev. of Scientific Instruments vol. 36 - N° 11 - Nov. 65
- [50] - Sandstone petrology evidence for luminescence petrography
Journ. Sed. Petrology, vol. 38, N° 2 - p. 530-554 - June 68

SMITH J.V. and R.C. STENSTROM

- [51] - Electron-excited luminescence as a petrologic tool
J. Geol., 73, p. 627-635 (1965)

WINKELMOLEN A.M., W. VAN DER KNAAP, R. EIJPE

- An optical method of measuring grain orientation in sediments
Sedimentology, vol. 11 - N° 3/4 - Déc. 1968

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : INTERET DE LA MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE DANS L'ETUDE DES ROCHES-RESERVOIRS	2
I - Quelques insuffisances de la pétrographie quantitative	
1 - Les concepts	
2 - Mode opératoire et concept	
3 - Les chartes	
II - Caractéristiques physiques du réservoir et géométrie du réseau poreux	
1 - Porosité	
2 - Perméabilité	
3 - Phénomènes capillaires	
CHAPITRE II : RAPPELS GENERAUX DE MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE	13
I - Résumé introductif	
II - Transformations ensemblistes	
1 - Addition de MINKOWSKI	
2 - Soustraction de MINKOWSKI	
3 - Ouverture et fermeture	
III - Fonctionnelles de MINKOWSKI	
1 - Théorème des projections	
2 - Théorème des traversées	
IV - Milieux poreux aléatoires	
1 - Loi spatiale et moments fonctionnels	
2 - Moments fonctionnels généralisés	
3 - Cas stationnaire	
4 - Problèmes de champ	
CHAPITRE III : L'ANALYSEUR DE TEXTURES	30
I - Présentation de l'appareil	
1 - Capteur	
2 - Unité de traitement	
3 - Systèmes de sortie	

II - Performances

- 1 - Avantages de l'A.T. par rapport à un ordinateur
- 2 - Programmes possibles
- 3 - Durée des mesures
- 4 - Précision des mesures

CHAPITRE IV : VISUALISATION DU RESEAU POREUX EN VUE DE SON ETUDE A L'ANALYSEUR DE TEXTURES

48

I - Les particularités de l'analyse automatique

- 1 - Oeil humain et caméra de télévision
- 2 - Cerveau humain et seuils
- 3 - Un critère : la courbe seuils-teneurs

II - Panorama des techniques de préparation d'échantillons

- 1 - Méthodes indirectes
- 2 - Méthodes directes

III - Visualisation du réseau poreux en fluorescence

- 1 - Critères
- 2 - Imprégnation de la roche par une résine
- 3 - Confection des plaques minces
- 4 - Visualisation des plaques minces
- 5 - Résultats expérimentaux

CHAPITRE V : COMPARABILITE DES MESURES DE POROSITE

78

I - Problèmes de définitions

- 1 - Le milieu poreux
- 2 - L'espace poreux
- 3 - La porosité
- 4 - Synthèse à l'aide de la théorie des variables régionalisées

II - Méthodes de mesure de la porosité

- 1 - Saturation
- 2 - Injection de mercure : méthode PURCELL
- 3 - Plaque mince

III - Comparaison des méthodes

- 1 - Essais d'interprétation
- 2 - Dimensions
- 3 - Résultats expérimentaux
- 4 - Commentaire des résultats

IV - CONCLUSION

CHAPITRE VI : LA COVARIANCE : CLE DE L'ANALYSE STRUCTURALE DU MILIEU POREUX

109

- I - Définitions et généralités
 - 1 - Signification énergétique de la covariance
 - 2 - Covariances croisées
- II - Propriétés à l'origine de la covariance
 - 1 - Porosité
 - 2 - Surface spécifique
 - 3 - Surface spécifique de contact
 - 4 - Traversée moyenne
- III - Propriétés à l'infini : la portée
 - 1 - Portée géostatistique : taille de la zone d'influence
 - 2 - Portées - intégrales : échantillon statistiquement équivalent
- IV - Propriétés globales : organisation spatiale et imbrication des structures
 - 1 - Structuration peu marquée : schémas booléens
 - 2 - Effet de trou
 - 3 - Imbrication de structures

CHAPITRE VII : ECHANTILLONNAGE ET ESTIMATION DE LA POROSITE

133

- I - Rappels de géostatistique
 - 1 - Variance d'extension
 - 2 - Variance de v dans V
 - 3 - Variance d'estimation
- II - Formules des grandes mailles
 - 1 - Sur la droite
 - 2 - Dans le plan
 - 3 - Dans l'espace
- III - Modèles de covariances
- IV - Porosité d'une lame mince
 - 1 - Variance d'estimation
 - 2 - Fourchette d'erreur
 - 3 - Exemple expérimental
- V - Porosité d'un plug
 - 1 - Formules théoriques
 - 2 - Exemple d'application

I - Le concept de granulométrie - Définition

1 - Les axiomes des granulométries

II - Granulométries linéaires

1 - Le moment $P(1)$

2 - Granulométrie en nombre et en longueur

3 - Etoiles

4 - Comparaison entre étoile et portée

5 - Ajustement des fonctions granulométriques

III - Granulométries selon une boule

1 - Loi du premier point de contact

2 - Granulométrie selon une sphère

CHAPITRE IX : COMPORTEMENT A L'ORIGINE DE LA GRANULOMETRIE LINEAIRE

1 - Angles

2 - Isthmes

3 - Petits grains

CHAPITRE X : SPHERICITE, RONDEUR ET INDICES DE FORME
EN GENERAL

193

I - Introduction

1 - Concept de forme

2 - Indices de forme : problèmes généraux

II - La sphéricité - étude critique

1 - Etude critique des indices usuels

2 - Le classement des formes : exemples

III - Définition d'un nouvel indice applicable à une forme quelconque

1 - Exigences imposées à l'indice

2 - Définition

IV - Indice de forme et granulométrie

1 - Relation théorique

2 - Calcul effectif à l'aide de l'A.T.

V - La rondeur

1 - Définition critique

2 - Nouvelle définition

3 - Interprétation de la mesure $H(d\lambda)$

CONCLUSIONS : PERSPECTIVES D'AVENIR

- I - Diagnose des échantillons DELF
- II - Tabulation des coefficients des "grandes mailles"
pour le schéma booléen-poissonien
- III - Calculs numériques sur $P(1)$
- IV - Loi lognormale
- V - Lois gamma
- VI - Angles
- VII - Distances
- VIII - Forme et taille
- IX - Granulométrie des tailles des B inscrits -
Interprétation de la mesure $H(d\lambda)$

NOM DE L'ETUDIANT : DELFINER Pierre

Nature de la thèse : DOCTEUR INGENIEUR

Vu, Approuvé

et permis d'imprimer

NANCY, le 21. 6. 71

Le Président du Conseil de l'Université de NANCY I



A handwritten signature in dark ink, appearing to be 'J.R. Helluy'.

J.R. HELLUY

